

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



# STRUCTURE DE GROUPE

بنية الزمرة

Chapitre XII — Série d'exercices

Saad Choukri

Terminale SM



**Rappels et notations.** Sauf mention contraire, un groupe  $G$  est noté multiplicativement et son élément neutre est noté  $e$ . Pour  $x \in G$  et  $n \in \mathbb{Z}$ , la puissance  $x^n$  est définie comme d'habitude, avec  $x^0 = e$  et  $x^{-n} = (x^{-1})^n$ . Un sous-groupe de  $G$  est une partie non vide de  $G$ , stable par produit et par passage à l'inverse.

## ✦ Exercice 1. Magmas et idempotents

Un magma est un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne.

- (1) Soit  $E = [0, 1]$  muni de la loi  $\star$  définie par  $x \star y = x + y - xy$  pour tous  $x$  et  $y$  de  $E$ . Montrer que  $(E, \star)$  est un magma associatif et commutatif.
- (2) Soit  $(M, \star)$  un magma. On dit que  $x \in M$  est *idempotent* si  $x \star x = x$ .
  - (a) On suppose que tout élément de  $M$  est régulier et que  $\star$  est distributive sur elle-même. Montrer que tout élément de  $M$  est idempotent. (Une loi  $\star$  est dite distributive sur elle-même si pour tous  $x, y, z$  on a  $x \star (y \star z) = (x \star y) \star (x \star z)$  et  $(y \star z) \star x = (y \star x) \star (z \star x)$ .)
  - (b) On suppose que tout élément de  $M$  est régulier et que la loi  $\star$  est associative. Montrer que  $M$  admet au plus un idempotent.

## ✦ Exercice 2. Un groupe sur $] - 1, 1[$

On pose  $G = ] - 1, 1[$  et, pour tous  $x$  et  $y$  de  $G$ ,

$$x \oplus y = \frac{x + y}{1 + xy}.$$

- Montrer que  $G$  muni de la loi  $\oplus$  est un groupe commutatif.

## ✦ Exercice 3. Sous-groupes usuels d'un groupe

Soit  $G$  un groupe noté multiplicativement.

- (1) (a) Soient  $I$  un ensemble non vide quelconque et  $(G_i)_{i \in I}$  une famille de sous-groupes de  $G$ . Montrer que  $\bigcap_{i \in I} G_i$  est un sous-groupe de  $G$ .  
 (b) Une réunion finie de sous-groupes de  $G$  est-elle un sous-groupe de  $G$  ?  
 (c) On appelle suite croissante d'ensembles une famille  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_n \subset \dots$ . Montrer que la réunion d'une suite croissante de sous-groupes de  $G$  est un sous-groupe de  $G$ .
- (2) (a) (*Centralisateur d'un élément*) Soit  $x \in G$  ; on appelle centralisateur de  $x$  dans  $G$  l'ensemble  $C_x$  des éléments de  $G$  qui commutent avec  $x$ . Montrer que  $C_x$  est un sous-groupe de  $G$ .  
 (b) (*Centre du groupe*) On appelle centre de  $G$  l'ensemble  $Z(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G, xy = yx\}$ . Montrer que  $Z(G)$  est un sous-groupe de  $G$ .

## ✦ Exercice 4. Réunion et produit de sous-groupes

Soient  $G$  un groupe et  $H, K$  deux sous-groupes de  $G$ .

- (1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $H \cup K$  soit un sous-groupe de  $G$ .

- (2) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble  $HK = \{xy \mid x \in H, y \in K\}$  soit un sous-groupe de  $G$ .

✦ **Exercice 5.** Automorphismes intérieurs

Soit  $G$  un groupe. Pour  $a \in G$  fixé, on pose  $\varphi_a(x) = axa^{-1}$  pour tout  $x \in G$ .

- (1) Montrer que pour tout  $a \in G$ ,  $\varphi_a$  est un automorphisme de  $G$ .
- (2) Montrer que l'ensemble  $\text{Int}(G)$  des automorphismes intérieurs de  $G$ , muni de la composition  $\circ$ , est un groupe.
- (3) Montrer que l'application  $a \mapsto \varphi_a$  est un morphisme de  $G$  vers  $\text{Int}(G)$  et déterminer son noyau.

✦ **Exercice 6.** Groupes de cardinal pair

Soit  $G$  un groupe fini de cardinal pair, d'élément neutre  $e$ .

- Montrer qu'il existe un élément  $x \neq e$  tel que  $x^{-1} = x$ .

✦ **Exercice 7.** Une loi opposée

Soit  $G$  un groupe noté multiplicativement. Sur  $G$ , on définit la loi  $\star$  par  $x \star y = yx$ .

- Montrer que  $(G, \star)$  est un groupe isomorphe au groupe  $(G, \times)$ .

✦ **Exercice 8.** Deux éléments qui commutent

Soit  $G$  un groupe d'élément neutre  $e$ . Soient  $a$  et  $b$  deux éléments de  $G$  vérifiant

$$a^2 = b^2 = (ba)^2 = e.$$

- Montrer que  $a$  et  $b$  commutent, c'est-à-dire que  $ab = ba$ .

✦ **Exercice 9.** Une puissance qui vaut le neutre

Soit  $G$  un groupe fini commutatif de cardinal  $n$ , d'élément neutre  $e$ .

- Montrer que pour tout élément  $g$  de  $G$ , on a  $g^n = e$ .  
(On pourra considérer l'application  $x \mapsto gx$  et le produit de tous les éléments de  $G$ .)

✦ **Exercice 10.** Sous-groupes additifs de  $\mathbb{Z}$

- Montrer que les sous-groupes de  $(\mathbb{Z}, +)$  sont de la forme  $n\mathbb{Z}$ , où  $n$  est un entier naturel.

✦ **Exercice 11.** Une partie finie stable

Soient  $G$  un groupe multiplicatif et  $H$  une partie finie non vide de  $G$ , stable par multiplication.

- Montrer que  $H$  est un sous-groupe de  $G$ .

✦ **Exercice 12.** Groupes d'exposant 2

Soit  $G$  un groupe tel que  $x^2 = e$  pour tout  $x \in G$ .

- (1) Montrer que  $G$  est commutatif.
- (2) Montrer que si  $G$  est fini et  $G \neq \{e\}$ , alors son cardinal ne peut pas être impair.

✦ **Exercice 13.** Sous-groupe engendré par un élément

Soit  $G$  un groupe et  $x$  un élément de  $G$ . On pose  $\langle x \rangle = \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ .

- (1) Montrer que  $\langle x \rangle$  est un sous-groupe commutatif de  $G$ .
- (2) Montrer que  $\langle x \rangle$  est le plus petit sous-groupe de  $G$  contenant  $x$ , au sens de l'inclusion.
- (3) On suppose qu'il existe un entier naturel non nul  $n$  tel que  $x^n = e$ . Montrer qu'alors  $\langle x \rangle = \{e, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ .

✦ **Exercice 14.** Le groupe des racines  $n$ -èmes de l'unité

Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $\mathbb{U}_n$  l'ensemble des racines  $n$ -èmes de l'unité dans  $\mathbb{C}$ .

- (1) Montrer que  $\mathbb{U}_n$  est un sous-groupe fini de  $(\mathbb{C}^*, \times)$  de cardinal  $n$ .
- (2) Montrer que  $\mathbb{U}_n$  est engendré par  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ .
- (3) Montrer que  $\mathbb{U} = \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{U}_n$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{C}^*, \times)$  qui n'est pas fini.

✦ **Exercice 15.** Noyau et image d'un morphisme

Soient  $G$  et  $G'$  deux groupes et  $f : G \rightarrow G'$  un morphisme de groupes.

- (1) Montrer que  $\text{Ker } f = \{x \in G \mid f(x) = e'\}$  est un sous-groupe de  $G$  et que  $f(G)$  est un sous-groupe de  $G'$ .
- (2) Montrer que  $f$  est injectif si et seulement si  $\text{Ker } f = \{e\}$ .
- (3) Soient  $x \in G$  et  $n$  un entier naturel non nul tels que  $x^n = e$ . Montrer que  $(f(x))^n = e'$ .

✦ **Exercice 16.** Deux groupes non isomorphes

- (1) Montrer que les groupes  $(\mathbb{R}, +)$  et  $(\mathbb{R}^*, \times)$  ne sont pas isomorphes.
- (2) Les groupes  $(\mathbb{R}, +)$  et  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$  sont-ils isomorphes ?

✦ **Exercice 17.** Un groupe réunion de deux sous-groupes

Soient  $G$  un groupe et  $H, K$  deux sous-groupes de  $G$ .

- Montrer que si  $H \cup K = G$ , alors  $H = G$  ou  $K = G$ .

✦ **Exercice 18.** Produit de deux groupes

Soient  $(G, \times)$  et  $(H, \times)$  deux groupes. On munit  $G \times H$  de la loi définie composante par composante.

- |                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>(1) Montrer que <math>G \times H</math> est un groupe.</p> <p>(2) Montrer que <math>G \times H</math> est commutatif si et seulement si <math>G</math> et <math>H</math> le sont.</p> | <p>(3) Montrer que <math>G \times \{e_H\}</math> est un sous-groupe de <math>G \times H</math> isomorphe à <math>G</math>.</p> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

## EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

### ✦ **Exercice 19.** *Somme des valeurs d'un morphisme*

Soit  $(G, *)$  un groupe fini. On considère un morphisme non constant  $f : (G, *) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$ .

- Déterminer la somme des valeurs prises par  $f$  sur  $G$ .

### ✦ **Exercice 20.** *Deux classes égales*

Soient  $G$  un groupe et  $H, K$  deux sous-groupes de  $G$ . On suppose qu'il existe deux éléments  $x, y \in G$  tels que  $xH = yK$ .

- Montrer que  $H = K$ .

### ✦ **Exercice 21.** *Un critère de structure de groupe*

Soit  $E$  un ensemble fini muni d'une opération interne

associative pour laquelle tout élément est régulier à droite et à gauche.

- Montrer que  $E$  est un groupe.

### ✦ **Exercice 22.** *Détermination de groupes*

- Trouver tous les groupes  $G$  pour lesquels l'application  $\phi : G \rightarrow G$  définie par  $\phi(g) = g^2$  pour tout élément  $g$  de  $G$  est un homomorphisme.

### ✦ **Exercice 23.** *Un groupe non engendré par un élément*

- (1) Montrer qu'il n'existe aucun rationnel  $a$  tel que  $\mathbb{Q} = \{na \mid n \in \mathbb{Z}\}$ .
- (2) Montrer plus généralement que  $(\mathbb{Q}, +)$  n'est engendré par aucune partie finie.

Fin de la série — Saad Choukri, Terminale SM