

بسم الله الرحمن الرحيم



LOIS DE COMPOSITION INTERNE

القوانين التركيبية الداخلية

Chapitre XI — Série d'exercices

Saad Choukri

Terminale SM



Rappels. Un monoïde est un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne associative admettant un élément neutre ; par exemple $(\mathbb{Z}, +)$ est un monoïde, de plus commutatif. Soit $(M, *)$ un monoïde d'élément neutre e . On dit qu'un élément r est régulier à gauche (resp. inversible à gauche) si pour tous $x, y \in M$, $r * x = r * y$ entraîne $x = y$ (resp. s'il existe $r' \in M$ tel que $r' * r = e$). On définit de manière analogue la régularité et l'inversibilité à droite.

✦ Exercice 1. Étude d'une loi sur $\mathbb{Q}$

On définit sur l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ la loi $\star$ par

$$x \star y = x + y - xy$$

pour tous rationnels x et y .

- Étudier la loi $\star$: associativité, commutativité, élément neutre, éléments symétrisables et éléments réguliers.

✦ Exercice 2. Une loi construite sur la valeur absolue

Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$. On définit sur E la loi $\dagger$ par

$$x \dagger y = \frac{x + y + |x - y|}{2}.$$

- Montrer que $\dagger$ définit une loi de composition interne sur E et l'identifier.
- Étudier ses propriétés : associativité, commutativité, existence d'un élément neutre, éléments réguliers.

✦ Exercice 3. Une loi définie à partir d'une autre

On définit sur un ensemble E non vide une loi de composition interne $*$ associative et on considère un élément $a \in E$. On définit la loi $\star$ sur E par

$$x \star y = x * a * y$$

pour tous x et y de E .

- Montrer que la loi $\star$ est associative, puis que $\star$ est commutative si $*$ l'est.

- On suppose que la loi $*$ est commutative, qu'elle admet un élément neutre e (avec $e \neq a$), et que a admet un symétrique a' pour la loi $*$.

- Montrer que la loi $\star$ admet un élément neutre, que l'on déterminera.
- Soit x un élément de E et x' son symétrique pour la loi $*$. Montrer que x admet un symétrique pour la loi $\star$, que l'on déterminera.

✦ Exercice 4. Symétrisabilité d'un produit

Soit M un monoïde commutatif dont la loi est notée multiplicativement. Soient x et y deux éléments de M ; on suppose que xy est symétrisable.

- Montrer que x et y sont symétrisables.

✦ Exercice 5. Une loi et les racines cubiques

On définit sur $\mathbb{R}$ la loi $\perp$ par

$$x \perp y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}.$$

- Montrer que $\perp$ est une loi de composition interne, associative et commutative sur $\mathbb{R}$.
- Déterminer son élément neutre et montrer que tout élément de $\mathbb{R}$ est symétrisable.

- (3) Montrer que l'application $x \mapsto x^3$ réalise un isomorphisme de $(\mathbb{R}, \perp)$ vers $(\mathbb{R}, +)$.

✦ **Exercice 6.** Une loi affine sur $\mathbb{Z}$

On définit sur $\mathbb{Z}$ la loi $\top$ par $x \top y = x + y - 3$.

- (1) Montrer que $(\mathbb{Z}, \top)$ est un monoïde commutatif dont on précisera l'élément neutre.
 (2) Déterminer le symétrique d'un élément $x \in \mathbb{Z}$.
 (3) Calculer la puissance $x^{[n]} = \underbrace{x \top x \top \dots \top x}_{n \text{ fois}}$ pour tout entier naturel non nul n .

✦ **Exercice 7.** Une loi exponentielle

On définit sur $E =]0, +\infty[$ la loi $\otimes$ par

$$x \otimes y = x^{\ln y}.$$

- (1) Montrer que $\otimes$ est une loi de composition interne commutative sur E .
 (2) Montrer que $\otimes$ est associative et déterminer son élément neutre.
 (3) Déterminer les éléments symétrisables de $(E, \otimes)$.

✦ **Exercice 8.** Le maximum de deux fonctions

On note $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit sur $\mathcal{F}$ la loi $\vee$ par

$$(f \vee g)(x) = \max(f(x), g(x))$$

pour tout réel x .

- (1) Montrer que $\vee$ est une loi de composition interne associative et commutative sur $\mathcal{F}$.

- (2) Montrer que tout élément de $\mathcal{F}$ est idempotent pour $\vee$.

- (3) La loi $\vee$ admet-elle un élément neutre sur $\mathcal{F}$? Quels sont ses éléments réguliers ?

✦ **Exercice 9.** P.G.C.D. et P.P.C.M. comme lois

- (1) Montrer que $(\mathbb{N}, \text{pgcd})$ est un monoïde commutatif dont on précisera l'élément neutre.
 (2) Montrer que $(\mathbb{N}, \text{ppcm})$ est un monoïde commutatif dont on précisera l'élément neutre.
 (3) Montrer que pour tous entiers naturels a, b et c ,

$$\text{ppcm}(a, \text{pgcd}(b, c))$$

$$= \text{pgcd}(\text{ppcm}(a, b), \text{ppcm}(a, c)).$$

✦ **Exercice 10.** Produit de deux monoïdes

Soient $(E, *)$ et $(F, \circ)$ deux monoïdes d'éléments neutres respectifs e et f . On munit $E \times F$ de la loi $\bullet$ définie par

$$(x, y) \bullet (x', y') = (x * x', y \circ y').$$

- (1) Montrer que $(E \times F, \bullet)$ est un monoïde et préciser son élément neutre.
 (2) Montrer qu'un couple (x, y) est symétrisable dans $E \times F$ si et seulement si x est symétrisable dans E et y est symétrisable dans F .
 (3) Le monoïde $E \times F$ est-il commutatif lorsque E et F le sont ?

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

✦ **Exercice 11.** Existence d'un idempotent

Soit $(E, *)$ un ensemble fini muni d'une loi de composition interne $*$ associative.

- Montrer qu'il existe un $x \in E$ tel que $x * x = x$.

✦ **Exercice 12.** Autour des monoïdes

- (1) (a) Montrer que $\mathbb{Z}$ est un monoïde commutatif pour la loi $*$ définie par $x * y = x + y - xy$.
 (b) Calculer les puissances de $x \in \mathbb{Z}$ correspondant à la loi $*$ (on note $x^{[n]} = \underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ fois}}$, où n est un entier naturel non nul).
 (2) (a) Montrer que l'ensemble $A = \{a^2 + b^2 \mid a, b \in \mathbb{N}\}$, muni de la multiplication des entiers, est un monoïde.
 (b) Muni de la multiplication des entiers, l'ensemble $B = \{a^2 + b^2 + c^2 \mid a, b, c \in \mathbb{N}\}$

est-il un monoïde ?

✦ **Exercice 13.** Le monoïde des applications

Soit X un ensemble non vide ; on note $\mathcal{F}(X)$ l'ensemble des applications de X dans lui-même, muni de la composition, et f un élément de ce monoïde.

- (1) Montrer que f est régulière à gauche si et seulement si f est injective, si et seulement si f est inversible à gauche.
 (2) Montrer que f est régulière à droite si et seulement si f est surjective, si et seulement si f est inversible à droite.

✦ **Exercice 14.** Encore les monoïdes

On considère un monoïde M d'élément neutre e .

- (1) Montrer que tout élément inversible à gauche et

- régulier à droite est inversible.
- (2) Donner un exemple d'un monoïde contenant un élément inversible à gauche mais non inversible à droite.
- (3) Montrer que dans un monoïde *fini*, tout élément régulier à gauche ou à droite est inversible.

✱ **Exercice 15.** Une application surjective et l'élément

neutre

Soit $*$ une loi de composition interne associative sur un ensemble non vide E telle que l'application

$$f : E \rightarrow E, \quad x \mapsto a * x * a$$

soit surjective, où a est un élément de E .

- Montrer que $*$ admet un élément neutre et que a est symétrisable.

Fin de la série — Saad Choukri, Terminale SM