

بسم الله الرحمن الرحيم



ARITHMÉTIQUE DANS $\mathbb{Z}$

الحسابيات في مجموعة الأعداد الصحيحة

Chapitre X — Série d'exercices

Saad Choukri

Terminale SM



✦ Exercice 1. Triplets pythagoriciens

On considère l'équation (E) dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

d'inconnue (a, b, c) .

- (1) Montrer que l'équation (E) admet une infinité de solutions.
- (2) Trouver toutes les solutions de l'équation (E) .

✦ Exercice 2. Racine carrée et carré parfait

Soit N un entier naturel.

- Montrer que $\sqrt{N} \in \mathbb{Q}$ si et seulement si N est un carré parfait.

✦ Exercice 3. Des restes égaux

- Trouver le plus grand entier naturel n tel que les restes de la division euclidienne de 81 849, 106 392 et 124 374 par n soient égaux.

✦ Exercice 4. Un tour de magie

Demandez à un élève de multiplier le jour et le mois de sa date d'anniversaire par 31 et 12 respectivement, puis d'ajouter les deux produits. Il vous donne le résultat et, oh miracle, vous lui donnez sa date d'anniversaire.

- Expliquer le procédé, et donner ma date d'anniversaire sachant que le résultat que j'ai trouvé est 308.

✦ Exercice 5. Les zéros de 100!

- Par combien de zéros se termine le nombre 100! ?

✦ Exercice 6. Une somme de puissances impaires

Soient n et k deux entiers naturels impairs.

- Montrer que n divise

$$1^k + 2^k + 3^k + \cdots + (n-1)^k + n^k.$$

✦ Exercice 7. Une équivalence modulo 6

Soient a, b et c trois entiers relatifs.

- Montrer l'équivalence suivante

$$6 \mid a^{81} + b^{81} + c^{81} \iff 6 \mid a + b + c.$$

✦ Exercice 8. Les nombres de Fermat

- (1) Soit n un entier naturel ; le n -ème nombre de Fermat est défini par $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que tous les nombres de Fermat sont premiers entre eux deux à deux.
- (2) Soit n un entier naturel. Montrer que si l'entier $2^n + 1$ est premier, alors n est une puissance de 2.

✦ Exercice 9. Un plus petit multiple

Soient x et y deux entiers naturels non nuls et k le plus petit entier naturel non nul tel que y divise kx .

- Montrer que k est un diviseur de y .

✦ Exercice 10. Les nombres de Mersenne

Soient a et n deux entiers ≥ 2 .

- Montrer que si $a^n - 1$ est un nombre premier, alors $a = 2$ et n est un nombre premier.

✦ **Exercice 11.** Une variante du théorème de Bézout

Soient x et y deux entiers ≥ 2 premiers entre eux.

- Montrer qu'il existe un unique couple d'entiers naturels (u_0, v_0) vérifiant

$$u_0x - v_0y = 1, \quad 1 \leq u_0 < y, \quad 1 \leq v_0 < x.$$

✦ **Exercice 12.** Des trous dans les nombres premiers

- Montrer que pour tout entier naturel non nul n , il existe n entiers consécutifs tels qu'aucun d'entre eux n'est un nombre premier.

✦ **Exercice 13.** Congruences et restes

- (1) Déterminer le reste de la division euclidienne de 7^{2026} par 5.
- (2) Déterminer le chiffre des unités de 3^{2026} .
- (3) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2^{100} par 7.

✦ **Exercice 14.** Deux équations diophantiennes

- (1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $17x - 40y = 3$.
- (2) Montrer que l'équation $6x + 9y = 5$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{Z}^2$.

✦ **Exercice 15.** P.G.C.D. et P.P.C.M. imposés

- Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers naturels non nuls tels que

$$\text{pgcd}(a, b) = 12 \quad \text{et} \quad \text{ppcm}(a, b) = 180.$$

✦ **Exercice 16.** Un p.g.c.d. dépendant d'un paramètre

Soit n un entier naturel. On pose $d_n = \text{pgcd}(2n + 3, n + 7)$.

- (1) Montrer que d_n divise 11.
- (2) En déduire les valeurs possibles de d_n , et déterminer les entiers n pour lesquels $d_n = 11$.

✦ **Exercice 17.** Une divisibilité par 42

- Montrer que pour tout entier relatif n , l'entier $n^7 - n$ est divisible par 42.

✦ **Exercice 18.** Nombres de deux chiffres

Soit $N = \overline{ab}^{(10)}$ un entier naturel de deux chiffres.

- (1) Montrer que $\overline{ab}^{(10)} - \overline{ba}^{(10)}$ est divisible par 9.
- (2) Déterminer tous les entiers de deux chiffres égaux à trois fois la somme de leurs chiffres.

✦ **Exercice 19.** Le critère de divisibilité par 11

- (1) Montrer qu'un entier naturel $N = \overline{a_na_{n-1} \dots a_1a_0}^{(10)}$ est divisible par 11 si et seulement si la somme alternée $a_0 - a_1 + a_2 - \dots$ est divisible par 11.
- (2) Le nombre 918 082 est-il divisible par 11 ?

✦ **Exercice 20.** Sommes de deux carrés

- (1) Montrer qu'aucun entier congru à 3 modulo 4 n'est la somme de deux carrés d'entiers.
- (2) En déduire que 2023 n'est pas la somme de deux carrés.

✦ **Exercice 21.** Une divisibilité par récurrence

- (1) Montrer que pour tout entier naturel n , l'entier $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.
- (2) Montrer que pour tout entier naturel n , l'entier $4^n + 6n - 1$ est divisible par 9.

✦ **Exercice 22.** Un système de congruences

- Déterminer tous les entiers relatifs n vérifiant simultanément

$$n \equiv 2 \pmod{5} \quad \text{et} \quad n \equiv 3 \pmod{7}.$$

✦ **Exercice 23.** Nombres parfaits

Un entier naturel non nul est dit *parfait* s'il est égal à la somme de ses diviseurs stricts.

- (1) Vérifier que 6 et 28 sont des nombres parfaits.
- (2) Soit p un entier naturel tel que $2^p - 1$ soit un nombre premier. Montrer que $N = 2^{p-1}(2^p - 1)$ est un nombre parfait.

✦ **Exercice 24.** Une infinité de diviseurs premiers

Soit $a \geq 2$ un entier naturel.

- Montrer que l'ensemble des nombres premiers divisant au moins un terme de la suite $(a^n - 1)_{n \geq 1}$ est infini.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

✦ **Exercice 25.** *Théorème de Wilson*

Soit $p \geq 2$ un entier naturel.

- Montrer que p est un nombre premier si et seulement si p divise $(p-1)! + 1$.

✦ **Exercice 26.** *Une formule pour le P.G.C.D.*

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

- Montrer que

$$\text{pgcd}(a, b) = a + b - ab + 2 \sum_{k=1}^{b-1} E\left(k \times \frac{a}{b}\right),$$

où E désigne la partie entière.

✦ **Exercice 27.** *Autour des nombres jumeaux*

On appelle nombres jumeaux deux nombres premiers qui ne diffèrent que de 2. Soient $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}^{(10)}$ et $\overline{b_1 b_2 \dots b_n}^{(10)}$ les représentations en base décimale de deux nombres jumeaux ≥ 5 .

- Montrer que l'entier N de représentation décimale $\overline{a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_n b_n}^{(10)}$ ne peut pas être un nombre

premier.

✦ **Exercice 28.** *Détermination de polynômes*

- Déterminer tous les polynômes P à coefficients entiers tels que $P(n)$ divise $2^n - 1$ pour tout entier naturel non nul n .

✦ **Exercice 29.** *Une divisibilité par un nombre premier*

Soit p un nombre premier.

- Montrer qu'il existe une infinité d'entiers naturels k tels que

$$p \text{ divise } 1^k + 2^k + 3^k + \dots + (p+1)^k.$$

✦ **Exercice 30.** *Les nombres premiers de la forme $4k+3$*

- (1) Montrer que tout entier naturel de la forme $4k+3$ admet au moins un diviseur premier de la forme $4k'+3$.
- (2) En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4k+3$.

Fin de la série — Saad Choukri, Terminale SM