

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

المعادلات التفاضلية

Chapitre IX — Série d'exercices

Saad Choukri

Terminale SM



✦ Exercice 1. Résolutions directes

- Résoudre chacune des équations différentielles suivantes :

- $y' + 3y = 0$, avec la condition $y(0) = 2$;
- $y' - 2y = 4$;
- $y'' + 9y = 0$, avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 3$;
- $y'' - y' - 6y = 0$.

✦ Exercice 2. Un second membre exponentiel

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + 2y = 3e^x.$$

- (1) Déterminer le réel a pour que la fonction $y_p : x \mapsto ae^x$ soit une solution de (E) .
- (2) Montrer qu'une fonction y est solution de (E) si et seulement si $y - y_p$ est solution de l'équation $y' + 2y = 0$.
- (3) En déduire l'ensemble des solutions de (E) , puis déterminer celle qui vérifie $y(0) = 0$.

✦ Exercice 3. Un second membre trigonométrique

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + y = \cos x.$$

- (1) Vérifier que la fonction $y_p : x \mapsto \frac{\cos x + \sin x}{2}$ est une solution de (E) .
- (2) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.
- (3) Montrer que toutes les solutions de (E) ont la même limite en $+\infty$ au sens suivant : leur différence tend vers 0.

✦ Exercice 4. Une équation d'Euler

On considère, sur $]0, +\infty[$, l'équation différentielle

$$(E) : x^2 y'' + xy' - y = 0.$$

Soit z une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $y(x) = z(\ln x)$ pour tout $x > 0$.

- (1) Exprimer $y'(x)$ et $y''(x)$ à l'aide de z' et z'' .
- (2) Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle (F) que l'on précisera.
- (3) Résoudre (F) , puis en déduire l'ensemble des solutions de (E) .
- (4) Déterminer l'unique solution f de (E) telle que $f(1) = 0$ et $f'(1) = 2$.

✦ Exercice 5. Une équation fonctionnelle

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable, non identiquement nulle, vérifiant

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2), \quad f(x + y) = f(x) f(y).$$

- (1) Montrer que $f(0) = 1$ et que f ne s'annule jamais.
- (2) Montrer que f est solution d'une équation différentielle du premier ordre faisant intervenir $a = f'(0)$.
- (3) En déduire l'expression de f .

✦ Exercice 6. Une intégrale première

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f'' = -f$.

- (1) Montrer que la fonction $x \mapsto (f(x))^2 + (f'(x))^2$ est constante sur $\mathbb{R}$.

- (2) En déduire que si $f(0) = f'(0) = 0$, alors f est identiquement nulle.
- (3) Montrer alors que $(\forall x \in \mathbb{R}), f(x) = f(0) \cos x + f'(0) \sin x$.

✦ **Exercice 7.** Une équation intégrale

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tout réel x ,

$$f(x) = x + \int_0^x f(t) dt.$$

- (1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est solution d'une équation différentielle que l'on précisera.
- (2) Déterminer l'expression de f .

✦ **Exercice 8.** Un problème de refroidissement

Un corps porté à la température de 90°C est placé dans une pièce maintenue à 20°C . On note $\theta(t)$ sa température, en degrés Celsius, après t minutes. La loi de refroidissement de Newton s'écrit

$$\theta'(t) = -k(\theta(t) - 20), \quad k > 0.$$

- (1) En posant $u(t) = \theta(t) - 20$, résoudre cette équation et exprimer $\theta(t)$ en fonction de k et t .
- (2) Sachant que $\theta(10) = 60$, déterminer la valeur de k .
- (3) Au bout de combien de temps la température du corps atteint-elle 30°C ? Le corps atteint-il un jour la température de la pièce ?

✦ **Exercice 9.** Une équation de Bernoulli

On considère, sur un intervalle I , l'équation

$$(E) : y' + y = y^2,$$

d'inconnue une fonction y dérivable et ne s'annulant pas sur I . On pose $z = \frac{1}{y}$.

- (1) Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation $z' - z = -1$.
- (2) Résoudre cette dernière équation, puis en déduire les solutions de (E) .
- (3) Préciser, suivant la valeur de la constante obtenue, le plus grand intervalle I sur lequel la solution est définie.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

✦ **Exercice 10.** Une équation à argument réfléchi

- Déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad f'(x) = f(1 - x).$$

Indication. Montrer d'abord que f est deux fois dérivable et que $f'' = -f$, puis exploiter la relation initiale en $x = \frac{1}{2}$.

✦ **Exercice 11.** Un système différentiel

Résoudre le système différentiel d'inconnue le couple (y, z) de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y' = 2y + z, \\ z' = y + 2z. \end{cases}$$

- On pourra étudier les fonctions $s = y + z$ et $d = y - z$, puis déterminer la solution vérifiant $y(0) = 1$ et $z(0) = 0$.

✦ **Exercice 12.** Une équation intégrale d'ordre deux

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tout réel x ,

$$f(x) = 1 + \int_0^x (x - t)f(t) dt.$$

- (1) Montrer que $f(x) = 1 + x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt$, puis que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
- (2) Montrer que f est solution du problème $f'' = f$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$.
- (3) En déduire l'expression de f .

✦ **Exercice 13.** Une équation de Riccati

On considère l'équation $(E) : y' = 1 + y^2$, d'inconnue une fonction y dérivable sur un intervalle I .

- (1) Vérifier que la fonction $x \mapsto \tan x$ est solution de (E) sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- (2) Soit y une solution de (E) sur I . Montrer que la fonction $x \mapsto \arctan(y(x)) - x$ est constante sur I .
- (3) En déduire toutes les solutions de (E) , ainsi que les intervalles maximaux sur lesquels elles sont définies.

✦ **Exercice 14.** Comportement asymptotique des solutions

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y'' + y' + y = 0.$$

(1) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

(2) Montrer que toute solution y de (E) vérifie
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$.

(3) Montrer que toute solution non nulle de (E)
s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}$.



Fin de la série — Saad Choukri, Terminale SM