

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



INTÉGRATION DES FONCTIONS CONTINUES

حساب التكامل

Chapitre VIII — Série d'exercices

Saad Choukri

Terminale SM



✦ Exercice 1. Trois calculs d'intégrales

- Déterminer les valeurs des intégrales suivantes

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2t)}{1 + 2 \sin t} dt, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t} dt,$$

$$K = \int_0^{\pi} (\cos^6 t + \sin^6 t) dt.$$

✦ Exercice 2. Une symétrie du domaine

- (1) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(a + b - t) dt.$$

- (2) (Application) Calculer les intégrales suivantes

$$I = \int_{-1}^1 (\sqrt[3]{1-t} - \sqrt[3]{1+t}) dt,$$

$$J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sqrt[3]{\sin t} - \sqrt[3]{\cos t}) dt,$$

$$K = \int_0^{\pi} t \sin t dt.$$

✦ Exercice 3. Un changement de variable

- (1) En utilisant le changement de variable $t = x + \sqrt{1+x^2}$, déterminer la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

- (2) En déduire le calcul de l'intégrale

$$J = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx.$$

✦ Exercice 4. Intégrale d'une fonction périodique

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique de période $T > 0$.

- Montrer que pour tout réel a et tout entier relatif n , on a

$$\int_a^{a+nT} f(x) dx = n \int_a^{a+T} f(x) dx.$$

✦ Exercice 5. Positivité de l'intégrale

- (1) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (où $a < b$) une fonction continue, positive et non nulle. Montrer que

$$\int_a^b f(x) dx > 0.$$

- (2) Soit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (où $a < b$) une fonction numérique continue. Montrer l'implication

$$\int_a^b g^2(x) dx = 0 \implies g = 0.$$

✦ Exercice 6. Une somme de Riemann

Soit $\alpha > 0$ un nombre réel donné.

- Déterminer la limite de la suite $(U_n)_{n>0}$ de terme général

$$U_n = \frac{1 + 2^\alpha + 3^\alpha + \dots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}.$$

✦ Exercice 7. Une seconde somme de Riemann

- Déterminer la limite de la suite $(V_n)_{n>0}$ de terme général

$$V_n = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right).$$

✦ **Exercice 8.** Une intégrale nulle et un zéro

Soit $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant

$$\int_0^\pi \sin(t) f(t) dt = 0.$$

- Montrer qu'il existe un nombre réel $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

✦ **Exercice 9.** Une primitive à déterminer

- Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto x^5 e^{x^3}$.

✦ **Exercice 10.** Une minoration de l'exponentielle

Soit n un entier naturel.

- Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, on a

$$\exp(x) \geq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

✦ **Exercice 11.** Une intégrale de Wallis-Euler

- Montrer que pour tous entiers naturels p et q ,

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt = \frac{p! q!}{(p+q+1)!}.$$

✦ **Exercice 12.** Intégrale de Poisson

Soit $r \in]-1, 1[$ un nombre réel et on considère l'intégrale

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \ln(r^2 - 2r \cos \theta + 1) d\theta.$$

- (1) Montrer que l'intégrale I existe.
- (2) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a

$$X^{2n} - 1 = (X-1)(X+1) \times \prod_{k=1}^{n-1} \left[\left(X - e^{i\frac{k\pi}{n}} \right) \left(X + e^{i\frac{k\pi}{n}} \right) \right].$$

- (3) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln \left(r^2 - 2r \cos \left(\frac{k\pi}{n} \right) + 1 \right) \\ = \frac{\pi}{n} \ln \left(\frac{(r^{2n} - 1)(r - 1)}{r + 1} \right). \end{aligned}$$

- (4) Utiliser ce qui précède pour calculer l'intégrale I .

✦ **Exercice 13.** Intégrales et inégalités

- (1) (Inégalité arithmético-géométrique) Montrer que pour tous réels $a_1, \dots, a_n \geq 0$, on a

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Indication. Ordonner les a_i sous la forme $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, noter A (respectivement G) la moyenne arithmétique (respectivement géométrique) des a_i , puis écrire

$$\begin{aligned} \frac{A}{G} - 1 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \int_{a_i}^G \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{G} \right) dt \\ &+ \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^n \int_G^{a_i} \left(\frac{1}{G} - \frac{1}{t} \right) dt, \end{aligned}$$

où l'indice k vérifie $a_k \leq G \leq a_{k+1}$.

- (2) Soient $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels, où $n \geq 1$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_i a_j}{i+j} \geq 0.$$

- (3) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^1 f(t) dt = 0$. On pose $\alpha = \min_{[0,1]} f$ et $\beta = \max_{[0,1]} f$. Montrer que

$$\int_0^1 f^2(t) dt \leq -\alpha\beta.$$

✦ **Exercice 14.** Inégalité de Young

- (1) Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ une fonction continûment dérivable telle que $f(0) = 0$, $f' > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que pour $a \geq 0$,

$$a f(a) = \int_0^a f(t) dt + \int_0^{f(a)} f^{-1}(t) dt,$$

puis que, pour tout $b \geq 0$,

$$ab \leq \int_0^a f(t) dt + \int_0^b f^{-1}(t) dt.$$

- (2) Établir que l'inégalité de la question précédente reste valable si on suppose seulement f continue et strictement croissante, avec $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

✦ **Exercice 15.** *Inégalité de Cauchy-Schwarz*

- (1) (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*) Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que

$$\left(\int_a^b f(t)g(t) dt \right)^2$$

$$\leq \left(\int_a^b f^2(t) dt \right) \times \left(\int_a^b g^2(t) dt \right).$$

- (2) (*Application*) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue à valeurs strictement positives. Montrer que

$$\int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt \geq (b-a)^2.$$

Fin de la série — Saad Choukri, Terminale SM