

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



NOMBRES COMPLEXES

الأعداد العقدية

Chapitre VII — Série d'exercices

Saad Choukri

Terminale SM



✦ Exercice 1. Module et argument

- Déterminer le module et l'argument du nombre complexe

$$z = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

✦ Exercice 2. Inégalité du parallélogramme

- Montrer que pour tous nombres complexes z et z' , on a

$$|z| + |z'| \leq |z + z'| + |z - z'|.$$

✦ Exercice 3. Caractérisation du triangle équilatéral

Soient A , B et C trois points du plan complexe d'affixes respectives a , b et c .

- Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$

✦ Exercice 4. Image du cercle unité

- Quelle est l'image du cercle unité privé du point d'affixe 1 par l'application $z \mapsto \frac{1}{1-z}$?

✦ Exercice 5. Un cas d'égalité et alignement

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient $M(z)$ et $M'(z')$ deux points distincts de O et distincts entre eux, tels que $|z+z'| = |z| + |z'|$.

- Montrer que les points O , M et M' sont alignés.

✦ Exercice 6. Deux sommes trigonométriques

Soient a et $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ des nombres réels et n un entier naturel non nul.

- Simplifier les sommes

$$S = \sum_{k=0}^n \sin(a + kx), \quad S' = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx).$$

✦ Exercice 7. Trois nombres de module 1

On désigne par $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

- Montrer que pour tous a , b et c éléments de $\mathbb{U}$, on a

$$|a + b + c| = |ab + bc + ca|.$$

✦ Exercice 8. Les coordonnées entières

- Soit $ABCD$ un carré dans le plan complexe. Prouver que si A et B sont à coordonnées entières, il en est de même de C et D .
- Peut-on trouver un triangle équilatéral dont les trois sommets sont à coordonnées entières ?

✦ Exercice 9. Inégalités sur les nombres complexes

- Montrer que pour tous nombres complexes u et v , on a

$$\frac{|u+v|}{1+|u+v|} \leq \frac{|u|}{1+|u|} + \frac{|v|}{1+|v|}.$$

- Soient $z_1, z_2, \dots, z_n$ des nombres complexes.

Montrer que

$$\frac{|\sum_{k=1}^n z_k|}{1 + |\sum_{k=1}^n z_k|} \leq \sum_{k=1}^n \frac{|z_k|}{1 + |z_k|}.$$

(3) Soient z et z' deux nombres complexes. Montrer que

$$|z + z'|^2 \leq (1 + |z|^2)(1 + |z'|^2).$$

✦ **Exercice 10.** Une inégalité géométrique

Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$ son argument principal.

- Montrer que $|z - 1| \leq ||z| - 1| + |z| |\theta|$.

✦ **Exercice 11.** Un rapport réel

Soient $z_1, z_2, \dots, z_n$ des nombres complexes non nuls de même module.

- Montrer que le rapport

$$\frac{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3) \cdots (z_n + z_1)}{z_1 z_2 \cdots z_n}$$

est un nombre réel.

✦ **Exercice 12.** Racines de l'unité et alignement

Soient $z_1, z_2, \dots, z_n$ les solutions complexes de l'équation $z^n = 1$. Dans le plan complexe, on note M_i le point d'affixe $(1 + z_i)^n$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

- Montrer que les points M_i sont tous alignés.

✦ **Exercice 13.** Une équation à inconnue complexe

- Trouver tous les nombres complexes z vérifiant l'équation

$$\bar{z}(z - 1) = z^2(\bar{z} - 1).$$

✦ **Exercice 14.** Un ensemble de points

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et on considère un triangle ABC où a , b et c sont les affixes respectives des points A , B et C .

- Déterminer l'ensemble Δ des points M du plan d'affixe z vérifiant

$$\frac{z - a}{b + c - 2a} \in \mathbb{R}.$$

✦ **Exercice 15.** Une suite de nombres complexes

On considère la suite complexe (z_n) définie par $z_0 = 1 + i$ et

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{3}$$

pour tout entier naturel n .

- Montrer que la suite (z_n) converge et déterminer sa limite.

✦ **Exercice 16.** Nombres complexes et géométrie

Soit ABC un triangle, AEC et AFB deux triangles isocèles et rectangles en A , et I le milieu de $[EF]$.

- Montrer que les droites (BC) et (IA) sont perpendiculaires et que $IA = \frac{BC}{2}$.

✦ **Exercice 17.** Racine réelle d'un polynôme

- Montrer que tout polynôme à coefficients réels de degré impair admet une racine réelle.

✦ **Exercice 18.** Une homographie du demi-plan

On note E l'ensemble des nombres complexes qui ne sont pas réels. Soient a , b , c et d quatre nombres réels vérifiant $ad - bc = 1$. On considère f de E dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$.

(1) Justifier que f est bien définie.

(2) (a) Démontrer que pour tout $z \in E$,

$$\operatorname{Im}\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz + d|^2}.$$

(b) En déduire que pour tout $z \in E$,

$$\operatorname{Im}\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = 0 \iff \operatorname{Im}(z) = 0.$$

(3) Démontrer que f est une bijection de E dans E .

✦ **Exercice 19.** Racines cinquièmes et nombre d'or

Dans le plan complexe $\mathcal{P}$, on donne les points B , D , E , C et A d'affixes respectives

$$z_B = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right),$$

$$z_D = z_B^2, \quad z_E = z_B^3, \quad z_C = z_B^4, \quad z_A = z_B^5.$$

(1) Montrer que z_A, z_B, z_C, z_D et z_E sont les racines cinquièmes de l'unité et que leur somme est nulle. Placer les points A , B , C , D et E dans le plan complexe.

(2) Calculer $\vec{OA} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE})$, puis en déduire que

$$1 + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0.$$

(3) Soit x_0 la racine positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. Comparer x_0 et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

(4) On sait que dans tout triangle ABC ,

$$\frac{\|\vec{AB}\|}{\sin \widehat{C}} = \frac{\|\vec{BC}\|}{\sin \widehat{A}} = \frac{\|\vec{AC}\|}{\sin \widehat{B}}.$$

Pour les points A , B et C définis à la première question, déterminer $\frac{\|\vec{BC}\|}{\|\vec{BA}\|}$ et comparer ce résultat à x_0 .

- (5) Soient M , N , P et Q les sommets consécutifs d'un carré et I le milieu du côté $[MQ]$. Sur le prolongement du segment $[MQ]$, on prend le point J tel que $IJ = IP$. Calculer $\frac{MJ}{MN}$ (les points M , I , Q et J sont alignés dans cet ordre).

✦ **Exercice 20.** Une transformation du plan complexe

Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère l'application f de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ telle que

$$f(z) = \frac{(1 + i\sqrt{3})z + 2\bar{z}}{6}.$$

- (1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.
- (2) Pour tout entier naturel n , on pose $z_0 = 1$ et $z_{n+1} = f(z_n)$, et on note u_n le module de z_n .
 - (a) Montrer que pour tout entier naturel n , on a $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$.
 - (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge et déterminer sa limite.
- (3) On note M_n l'image du nombre complexe z_n et on pose $S_n = OM_0 + OM_1 + \dots + OM_n$.
 - (a) Montrer que pour tout entier naturel n , on a $S_n \leq 3$.
 - (b) Montrer que la suite (S_n) est convergente.
- (4) On pose $z = re^{i\theta}$ avec $\theta \in]-\pi, \pi]$ et $r > 0$.
 - (a) Montrer que $f(z) = \frac{2}{3}r \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) e^{i\frac{\pi}{6}}$.
 - (b) Montrer que les points M_n (pour $n \in \mathbb{N}$) sont tous alignés.

✦ **Exercice 21.** Identité de Machin

Pour tout nombre complexe z , on pose $P(z) = z^2 - (2 + 6i)z$.

- (1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 4 - 6i$.
- (2) On pose $u = 1 + 5i$, $v = 1 + i$ et $w = 239 - i$, ainsi que $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{5}\right)$ et $\beta = \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$.
 - (a) Montrer que $u^4v = 4w$.
 - (b) Déterminer, en fonction de α , l'argument du nombre complexe u , et en fonction de β celui de w .
 - (c) (Identité de Machin) En déduire que

$$4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

✦ **Exercice 22.** Maximum d'un module sur le cercle unité

On considère la fonction $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(z) = |z^3 - z + 2|$, où $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1.

- Déterminer le maximum de la fonction f .

✦ **Exercice 23.** Une suite complexe géométrique

Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $z_0 = 1 + i$ et par la relation de récurrence

$$z_{n+1} = -\frac{1}{2}z_n.$$

- (1) Prouver que la suite de terme général $|z_n|$ est une suite géométrique.
- (2) Exprimer $\arg(z_n)$ en fonction de n .

✦ **Exercice 24.** Identités sur l'argument principal

- (1) Montrer que l'argument principal du nombre complexe $z = 1 + ix$ vaut $\arctan(x)$, où x est un nombre réel.
- (2) Soit $z = x + iy$ un nombre complexe de partie réelle x non nulle.
 - (a) On suppose $x > 0$. Montrer que $\arg(z) \equiv \arctan\left(\frac{y}{x}\right) [2\pi]$.
 - (b) Exprimer $\arg z$ d'une manière analogue, modulo 2π , si x est supposé strictement négatif.
- (3) Soit $z = x + iy$ un nombre complexe appartenant au cercle unité et différent de -1 . Prouver que

$$\arg(z) \equiv 2 \arctan\left(\frac{y}{x+1}\right) [2\pi].$$

✦ **Exercice 25.** Moyenne d'un polynôme sur les racines de l'unité

Soient P un polynôme à coefficients complexes, $m \geq 2$ un entier naturel et $\omega = e^{i\frac{2\pi}{m}}$.

- (1) Montrer que

$$\frac{P(1) + P(\omega) + P(\omega^2) + \dots + P(\omega^{m-1})}{m} = P(0)$$

lorsque le degré de P est strictement inférieur à m .

- (2) Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

✦ **Exercice 26.** *Un produit de sinus*

Soit $n \geq 2$ un entier naturel.

- Montrer que

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

✦ **Exercice 27.** *Produit de sommes de deux carrés*

Soient p un entier naturel non nul et $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p$ des nombres rationnels.

- Montrer qu'il existe deux nombres rationnels x et y tels que

$$\prod_{k=1}^p (a_k^2 + b_k^2) = x^2 + y^2.$$

✦ **Exercice 28.** *Un ordre sur trois quotients*

Soient x, y et z trois nombres complexes deux à deux différents tels que $y = tx + (1-t)z$, où $t \in]0, 1[$.

- Montrer que

$$\frac{|z| - |y|}{|z - y|} \geq \frac{|z| - |x|}{|z - x|} \geq \frac{|y| - |x|}{|y - x|}.$$

✦ **Exercice 29.** *Une somme de Gauss*

Soit n un entier naturel impair. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}.$$

- (1) Écrire $|S|^2$ comme une somme double, puis montrer que

$$|S|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=-k}^{n-k-1} \omega^{2pk+p^2}.$$

- (2) (a) Montrer que l'application $p \mapsto \omega^{2pk+p^2}$ est n -périodique, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.
 (b) En déduire, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, une écriture simplifiée de $\sum_{p=-k}^{n-k-1} \omega^{2pk+p^2}$.

- (3) Simplifier $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{2pk}$ pour tout entier relatif p .

- (4) En déduire l'égalité $|S| = \sqrt{n}$.

✦ **Exercice 30.** *Une sous-somme de module minoré*

On considère $n \geq 2$ nombres complexes $z_1, z_2, \dots, z_n$ tels que

$$|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| = 1.$$

- Montrer qu'il existe une partie S de $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ telle que

$$\left| \sum_{z \in S} z \right| \geq \frac{1}{\pi}.$$

Fin de la série — Saad Choukri, Terminale SM