

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



PRIMITIVES DES FONCTIONS CONTINUES

الروال الأصلية

Chapitre VI — Série d'exercices

Saad Choukri

Terminale SM



✦ Exercice 1. Primitives usuelles

- Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur un intervalle que l'on précisera :

$$f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad f_2(x) = \tan^2 x,$$

$$f_3(x) = \frac{x}{x^4 + 1}, \quad f_4(x) = \frac{1}{x^2 - 1},$$

$$f_5(x) = \cos^3 x.$$

✦ Exercice 2. Une primitive avec condition initiale

- Déterminer la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$ et

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad F'(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

✦ Exercice 3. Parité d'une primitive

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et F la primitive de f qui s'annule en 0.

- Montrer que si f est impaire, alors toute primitive de f est paire.
- Montrer que si f est paire, alors F est impaire.
- Que peut-on dire des autres primitives de f dans le cas où f est paire et non nulle ?

✦ Exercice 4. Périodicité d'une primitive

Soient $T > 0$ et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et T -périodique. On pose $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

- Montrer que la fonction $x \mapsto F(x+T) - F(x)$ est constante sur $\mathbb{R}$.

- En déduire que F est T -périodique si et seulement si $\int_0^T f(t) dt = 0$.

- Donner un exemple de fonction T -périodique dont aucune primitive n'est périodique.

✦ Exercice 5. Une bijection définie par une primitive

Soient $a < b$ deux réels et f une fonction continue et strictement positive sur $[a, b]$. On pose $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

- Montrer que F réalise une bijection de $[a, b]$ vers un intervalle que l'on précisera.
- En déduire qu'il existe un unique réel $c \in]a, b[$ tel que

$$\int_a^c f(t) dt = \int_c^b f(t) dt.$$

✦ Exercice 6. Une primitive à bornes variables

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{1+t^2}.$$

- Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$.
- Montrer que $g(x) = \arctan(2x) - \arctan(x)$, puis que

$$(\forall x > 0), \quad g(x) = \arctan\left(\frac{x}{1+2x^2}\right).$$

- En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et la valeur du maximum de g sur $\mathbb{R}^+$.

✦ **Exercice 7.** *Encadrement du sinus*

- (1) Montrer que $(\forall x \geq 0), \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.
 (2) En intégrant successivement, montrer que pour tout $x \geq 0$,

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$$

- (3) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ si cette limite existe.

✦ **Exercice 8.** *Une minoration de l'exponentielle*

Soit n un entier naturel.

- Montrer, par récurrence sur n et à l'aide de primitives, que

$$(\forall x \geq 0), \quad e^x \geq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

✦ **Exercice 9.** *Une équation intégrale*

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tout réel x ,

$$f(x) = 1 + \int_0^x f(t) dt.$$

- (1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f' = f$.
 (2) En déduire l'expression de f .

✦ **Exercice 10.** *Primitive de la partie entière*

On pose $F(x) = \int_0^x E(t) dt$ pour tout $x \geq 0$, où E désigne la partie entière.

- (1) Calculer $F(n)$ pour tout entier naturel n .
 (2) Montrer que pour tout $x \geq 0$,

$$F(x) = \frac{E(x)(E(x) - 1)}{2} + E(x)(x - E(x)).$$

- (3) La fonction F est-elle dérivable en tout point de $\mathbb{R}^+$?

✦ **Exercice 11.** *Une primitive composée*

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_0^{\sin x} \sqrt{1+t^2} dt.$$

- (1) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.
 (2) Montrer que F est impaire et 2π -périodique.
 (3) Déterminer les variations de F sur $[-\pi, \pi]$.

✦ **Exercice 12.** *Deux primitives trigonométriques*

- (1) Montrer que $(\forall x \in]-\pi, \pi[), 1 + \cos x = 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$.
 (2) En déduire une primitive sur $] - \pi, \pi[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1 + \cos x}$.
 (3) Déterminer de même une primitive de $x \mapsto \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ sur $] - \pi, \pi[$.

✦ **Exercice 13.** *Une suite d'intégrales et $\ln 2$*

Pour tout entier naturel n , on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

- (1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + u_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.
 (2) Montrer que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$, puis que (u_n) converge vers 0.
 (3) En déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$.

✦ **Exercice 14.** *Un encadrement de π*

- (1) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $1 - x^2 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1 - x^2 + x^4$.
 (2) Sachant que la primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ s'annulant en 0 est arctan, en déduire un encadrement de π .

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

✦ **Exercice 15.** *Zéros d'une fonction d'intégrale nulle*

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $\int_0^1 f(t) dt = 0$.

- (1) Montrer que f s'annule au moins une fois sur $]0, 1[$.

- (2) On suppose de plus que $\int_0^1 t f(t) dt = 0$. Montrer que f s'annule au moins deux fois sur $]0, 1[$.

Indication. Poser $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ et $G(x) = \int_0^x F(t) dt$.

✦ **Exercice 16.** Une inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. On pose, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\varphi(x) = x \int_0^x f^2(t) dt - \left(\int_0^x f(t) dt \right)^2.$$

(1) Montrer que $\varphi'(x) = \int_0^x (f(x) - f(t))^2 dt$ pour tout $x \in [0, 1]$.

(2) En déduire que φ est croissante, puis que

$$\left(\int_0^1 f(t) dt \right)^2 \leq \int_0^1 f^2(t) dt.$$

(3) Déterminer les fonctions f pour lesquelles il y a égalité.

✦ **Exercice 17.** Moments d'une fonction continue

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. Pour tout entier naturel n , on pose

$$I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx.$$

(1) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.

(2) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)I_n = f(1)$.

Indication. Écrire $(n+1)I_n - f(1) = (n+1) \int_0^1 x^n (f(x) - f(1)) dx$ et couper l'intervalle en $[0, 1-\delta]$ et $[1-\delta, 1]$.

✦ **Exercice 18.** Primitive d'une fonction périodique

Soient $T > 0$ et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et T -périodique. On pose

$$m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

(1) Montrer que la fonction $x \mapsto F(x) - mx$ est T -périodique.

(2) En déduire qu'elle est bornée sur $\mathbb{R}$.

(3) Montrer alors que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = m$.

✦ **Exercice 19.** Une équation fonctionnelle intégrale

- Déterminer toutes les fonctions f continues et strictement positives sur $\mathbb{R}^+$ vérifiant, pour tout $x \geq 0$,

$$(f(x))^2 = 1 + 2 \int_0^x f(t) dt.$$

Fin de la série — Saad Choukri, Terminale SM