

بسم الله الرحمن الرحيم



# THÉORÈME DE ROLLE, T.A.F. ET APPLICATIONS

## مبرهنة رول ومبرهنة التزايد المتتالية

Chapitre V — Série d'exercices

Saad Choukri

Terminale SM



### ✦ Exercice 1. La série harmonique par le T.A.F.

On considère la suite  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de terme général

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

- Montrer que la suite  $(H_n)$  est divergente et déterminer sa limite.

### ✦ Exercice 2. Dérivée à droite et croissance

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que  $a < b$  et  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur l'intervalle  $[a, b[$ , dérivable à droite en tout point de cet intervalle. On suppose de plus que pour tout  $x \in [a, b[$ , on a  $f'_d(x) \geq 0$ .

- Montrer que la fonction  $f$  est croissante.

### ✦ Exercice 3. Une limite d'exponentielles

- Déterminer la valeur de la limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( \exp\left(\frac{1}{x}\right) - \exp\left(\frac{1}{x+1}\right) \right).$$

### ✦ Exercice 4. Rolle avec un facteur exponentiel

Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions dérivables, où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe  $a < b$  deux nombres réels appartenant à  $I$  tels que  $f(a) = f(b) = 0$ .

- Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$f'(c) + f(c)g'(c) = 0.$$

### ✦ Exercice 5. Une moyenne de deux valeurs

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable. Soient  $x_1 < x_2 < x_3$  trois nombres réels

de  $I$  vérifiant

$$2f(x_3) = f(x_1) + f(x_2).$$

- Montrer qu'il existe  $c \in I$  tel que  $f'(c) = 0$ .

### ✦ Exercice 6. Une série de Bertrand

On considère la suite  $(U_n)_{n \geq 1}$  de terme général

$$U_n = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

- Montrer que la suite  $(U_n)_{n \geq 1}$  est convergente.

### ✦ Exercice 7. Une variante du théorème de Rolle

Soient  $0 < a < b$  deux nombres réels et  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$  telle que  $f(a) = f(b)$ .

- Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$f'(c) = \frac{f(c)}{c}.$$

### ✦ Exercice 8. Une équation polynomiale

Soient  $a, b$  et  $c$  trois nombres réels.

- Montrer que l'équation

$$(E) : 18ax^{17} + 14bx^{13} + 5cx^4 = a + b + c$$

admet une solution dans  $]0, 1[$ .

### ✦ Exercice 9. Une limite en $+\infty$ et Rolle

Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}^+$  et dérivable sur  $\mathbb{R}^{*+}$  telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(0).$$

- Montrer qu'il existe  $c > 0$  tel que  $f'(c) = 0$ .

## EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

### ✦ Exercice 10. *Cauchy et règle de l'Hospital*

- (1) (a) (*Valeur moyenne de Cauchy*) Soient  $a < b$  deux réels et  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues et dérivables sur  $]a, b[$  telles que  $g(a) \neq g(b)$  et telles que  $g'(x) \neq 0$  pour tout  $x \in ]a, b[$ . Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)}.$$

- (b) (*Règle de l'Hospital*) Soient  $I$  un intervalle ouvert,  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions dérivables sur  $I$  et  $a \in I$ . On suppose que  $f$  et  $g$  s'annulent en  $a$ . Si  $l = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existe dans  $\mathbb{R}$ , montrer que  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  existe dans  $\mathbb{R}$  et vaut  $l$ .

- (2) (*Application*) Calculer les limites suivantes

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, \quad L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3},$$

$$L_3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}.$$

### ✦ Exercice 11. *Deux généralisations de Rolle*

- (1) (a) Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ . Montrer qu'il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $f'(c) = 0$ .
- (b) (*Application*) Montrer que toute fonction polynomiale à coefficients réels de degré impair admet une racine dans  $\mathbb{R}$ .
- (2) Soient  $a < b$  deux nombres réels et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  est dérivable  $n - 1$  fois sur

$[a, b]$  ( $n \geq 1$  entier), que sa dérivée  $(n - 1)$ -ème est continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ , et que  $f$  s'annule en  $n + 1$  points

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b.$$

Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f^{(n)}(c) = 0$ .

### ✦ Exercice 12. *Un encadrement par le T.A.F.*

Soit  $a \in ]0, 1[$  un nombre réel.

- Montrer que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,

$$\frac{a}{(1+n)^{1-a}} \leq (1+n)^a - n^a \leq \frac{a}{n^{1-a}}.$$

### ✦ Exercice 13. *Une formule de Taylor-Lagrange*

Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et soient  $a$  et  $b$  deux éléments de  $I$  tels que  $a \neq b$ .

- Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(c).$$

### ✦ Exercice 14. *Une tangente passant par l'origine*

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable telle que

$$f(0) = f'(0) = f(1) = 0.$$

- Prouver qu'il existe un point  $(a, f(a))$ , avec  $a \neq 0$ , de la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentative de  $f$  tel que la tangente à cette courbe en ce point passe par l'origine  $(0, 0)$ .

Fin de la série — Saad Choukri, Terminale SM