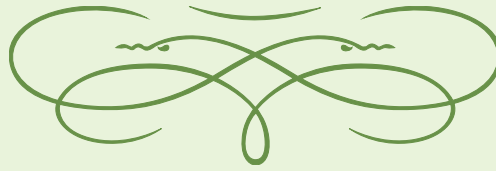


بسم الله الرحمن الرحيم



LOGARITHMES ET EXPONENTIELLES

الدوال اللوغاريتمية والأسية

Chapitre IV — Série d'exercices

Saad Choukri

Terminale SM



✦ Exercice 1. Un encadrement du nombre e

- Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

✦ Exercice 2. Un système d'équations

- Déterminer tous les triplets de nombres réels (a, b, c) tels que

$$a + b + c = 0 \quad \text{et} \quad e^a + e^b + e^c = 3.$$

✦ Exercice 3. Une fonction définie implicitement

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ une fonction, qu'on ne suppose pas dérivable, vérifiant pour tout $x \in [0, +\infty[$

$$f(x) e^{f(x)} = x.$$

- Étudier les variations de la fonction f .

✦ Exercice 4. L'inégalité arithmético-géométrique

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres réels positifs, où $n \geq 1$ est un entier naturel.

- Montrer que

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

✦ Exercice 5. Une dérivée dominée par la fonction

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(0) = 0$ et vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f'(x)| \leq |f(x)|.$$

- Montrer que la fonction f est identiquement nulle.

✦ Exercice 6. Une limite donnant le logarithme

Soit $a > 0$ un nombre réel.

- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n (\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a$.

✦ Exercice 7. Une équation fonctionnelle différentielle

Soit a un nombre réel strictement positif.

- Trouver toutes les fonctions $f :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ telles que, pour tout $x > 0$,

$$f'\left(\frac{a}{x}\right) = \frac{x}{f(x)}.$$

✦ Exercice 8. Un produit convergent

On considère la suite de terme général

$$P_n = \prod_{p=1}^{n-1} \left(1 + \frac{p}{n^2}\right)$$

définie pour $n \geq 1$.

- Montrer que cette suite converge, en déterminant sa limite.

✦ Exercice 9. Le logarithme n'est pas rationnel

- Démontrer que la fonction logarithme népérien $\ln$ n'est pas la restriction d'une fonction rationnelle sur $]0, +\infty[$.

✦ Exercice 10. Une équation en nombres entiers

- Trouver tous les couples d'entiers naturels (n, m) tels que $n^m = m^n$.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

✦ Exercice 11. *Lemme de Gibbs*

Soient n un entier naturel non nul et $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ des nombres réels strictement positifs vérifiant

$$p_1 + \dots + p_n = q_1 + \dots + q_n = 1.$$

- Montrer que $\sum_{i=1}^n p_i \ln q_i \leq \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i$.

✦ Exercice 12. *Un produit de logarithmes*

Soit $n \geq 2$ un entier naturel.

- Montrer que $\prod_{k=2}^n \ln k < \frac{\sqrt{n!}}{n}$.

✦ Exercice 13. *Arctangente et nombres de Fibonacci*

On appelle suite de Fibonacci la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.

- (1) (*Identité de Cassini*) Montrer que pour tout entier naturel n , on a l'identité

$$f_{n+1}^2 - f_{n+2}f_n = (-1)^n.$$

- (2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} \arctan\left(\frac{1}{f_{2n}}\right) &= \arctan\left(\frac{1}{f_{2n+1}}\right) \\ &\quad + \arctan\left(\frac{1}{f_{2n+2}}\right). \end{aligned}$$

- (3) En déduire l'existence de $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{1}{f_{2n+1}}$.

✦ Exercice 14. *Monotonie et inégalité logarithmique*

- (1) Étudier la monotonie de la fonction

$$f : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{(1+t) \ln(1+t)}{t}.$$

- (2) En déduire la monotonie de la fonction

$$\varphi : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)},$$

où a et b sont deux réels strictement positifs. On discutera suivant les valeurs de a et b .

- (3) En déduire que pour tous $a, b > 0$,

$$\ln\left(1 + \frac{a}{b}\right) \times \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \leq (\ln 2)^2.$$

✦ Exercice 15. *Une vitesse de convergence*

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels strictement positifs telle que $a_1 > 2$ et, pour tout entier naturel non nul n ,

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

- Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} (3 - a_n)^{4^n}$.

Fin de la série — Saad Choukri, Terminale SM