

بسم الله الرحمن الرحيم



DÉRIVATION, RACINES n -ÈMES ET ARCTANGENTE

الاشتقاق والجذور من الرتبة n ودالة قوس الظل

Chapitre III — Série d'exercices

Saad Choukri

Terminale SM



✦ Exercice 1. Maximum de trois trinômes

Soient P_1 , P_2 et P_3 trois fonctions polynomiales du second degré et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \max(P_1(x), P_2(x), P_3(x))$ pour tout réel x .

- Montrer que f est dérivable si et seulement si $f = P_i$ pour un certain $i \in \{1, 2, 3\}$.

✦ Exercice 2. Une équation à radicaux emboîtés

- Déterminer les valeurs du nombre réel x vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \sqrt{x + \sqrt{x^2 + \cdots + \sqrt{x^n}}}} = 2.$$

✦ Exercice 3. Comparaison de racines n -èmes

Soient $n \geq 2$ un entier naturel et $0 < x < y$ deux nombres réels.

- Est-il vrai que $\sqrt[n]{y} - \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y-x}$?

✦ Exercice 4. Maximum local d'une suite de fonctions

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on définit la fonction f_n par

$$f_n(x) = 2nx^{2+n} - 2(n+2)x^{1+n} + (2+n)x + 1.$$

- (1) Montrer que pour tout $n \geq 2$, f_n possède un unique maximum local, qu'on notera x_n .
- (2) Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ converge et que sa limite vaut 1.

✦ Exercice 5. Une primitive imposée

- Trouver toutes les fonctions bornées $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admettant une primitive $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$ et $F(x) = f(2x)$ pour tout réel x .

✦ Exercice 6. Une limite de racines $2n$ -èmes

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 2}$ définie par

$$f_n(x) = \sqrt[2n]{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}.$$

- Déterminer, suivant les valeurs de x , la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

✦ Exercice 7. Une identité sur l'arctangente

On pose $x = \arctan \sqrt{2}$.

- Montrer que $0 < \pi - 2x < \frac{\pi}{2}$, puis en déduire que

$$\arctan(2\sqrt{2}) + 2\arctan \sqrt{2} = \pi.$$

✦ Exercice 8. Une formule sur arctan

- (1) Soit x un nombre réel ; écrire $\cos(\arctan x)$ et $\sin(\arctan x)$ en fonction de x .
- (2) Soient a et b deux nombres réels tels que $ab \neq 1$. Donner une expression de $\arctan a + \arctan b$ en fonction de $\arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$.

✦ Exercice 9. Une limite avec trois radicaux

- Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - 2\sqrt[3]{x^3 + x} + \sqrt[4]{x^4 + x^2} \right).$$

✦ Exercice 10. Un quotient d'accroissements

- Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(x+1) - \arctan(x)}{\sin\left(\frac{1}{x+1}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

✚ **Exercice 11.** *Un prolongement par continuité*

Soient $n, m \geq 2$ deux entiers naturels. On considère la fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par

$$f(x) = \frac{1}{n(1 - \sqrt[n]{\cos x})} - \frac{1}{m(1 - \sqrt[m]{\cos x})}.$$

- Montrer que la fonction f admet un prolongement par continuité en $x_0 = 0$.

✚ **Exercice 12.** *Une équation fonctionnelle*

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 3f(x).$$

- Montrer que f est identiquement nulle.

✚ **Exercice 13.** *Un produit de racines k-èmes*

Soit n un entier naturel non nul.

- Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \prod_{k=2}^{n+1} \sqrt[k]{1 + (-1)^k x}}{x}.$$

✚ **Exercice 14.** *La parité et les primitives*

- (1) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que f' soit impaire et $f(0) = 0$. Montrer que f est une fonction paire.
- (2) Que peut-on dire si f' est supposée paire, sous l'hypothèse $f(0) = 0$?

✚ **Exercice 15.** *Une somme binomiale*

Soit $n \geq 2$ un entier naturel.

- Déterminer, en fonction de n , la valeur de la somme $S_n = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$.

✚ **Exercice 16.** *Optimisation d'une surface*

- Parmi tous les losanges qui ont le même périmètre p , quel est celui qui a la plus grande surface ?

✚ **Exercice 17.** *La limite de $\sqrt[n]{n}$*

- Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

✚ **Exercice 18.** *Une suite de fonctions et une droite*

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ définie par $f_1(x) = \sqrt{x^2 + 48}$ et, pour tout entier naturel n ,

$$f_{n+1}(x) = \sqrt{x^2 + 6f_n(x)}$$

pour tout réel x .

- Déterminer la position relative de la courbe $\mathcal{C}_{f_n}$ et de la droite (Δ) d'équation $y = 2x$, pour tout entier naturel non nul n .

✚ **Exercice 19.** *Limite d'une fonction et de sa dérivée*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle du type $]a, +\infty[$, où $a > 0$.

- L'implication $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ est-elle toujours vraie ? Justifier.

✚ **Exercice 20.** *Une somme de fractions rationnelles*

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{ax^3}{x + \alpha} + \frac{bx^3}{x + \beta} + \frac{cx^3}{x + \gamma},$$

où a, b, c, α, β et γ sont des réels distincts deux à deux.

- (1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que f admette une limite finie en $+\infty$.
- (2) Déterminer la valeur de la limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^3 \left(\frac{\beta - \gamma}{x + \alpha} + \frac{\gamma - \alpha}{x + \beta} + \frac{\alpha - \beta}{x + \gamma} \right) \right].$$

✚ **Exercice 21.** *Un écart borné à l'identité*

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ telle que $g : x \mapsto f(x) - x$ soit bornée sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$, où $a > 0$.

- Déterminer les valeurs des limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

✚ **Exercice 22.** *Une relation de translation*

Soit f une fonction définie sur $[0, +\infty[$, bornée sur le segment $[0, 1]$ et vérifiant, pour tout réel $x \geq 0$, $f(x+1) = f(x) + 1$.

- Déterminer les valeurs des limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

✚ **Exercice 23.** *Parité de $2f - xf'$*

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2f(x) - xf'(x)$.

- Montrer que si g est une fonction paire, alors il en est de même pour f .

✚ **Exercice 24.** *Une inéquation fonctionnelle*

- Trouver toutes les fonctions $f :]0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ telles que, pour tous $x, y > 0$, l'inégalité

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{x+y}$$

ait lieu.

✚ **Exercice 25.** *Partie entière et parité*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = E(x)^2 + (2E(x) + 1)(x - E(x)).$$

- Montrer que f est une fonction paire.

✚ **Exercice 26.** *Un taux d'accroissement croissant*

Soit f une fonction croissante sur $[a, +\infty[$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, où a et b sont deux réels. On sup-

pose de plus que la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante sur $]a, +\infty[$.

- Montrer que f est une fonction constante sur $[a, +\infty[$.

✚ **Exercice 27.** *Minimum et maximum de deux fonctions*

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in I$, on pose

$$m(x) = \min(f(x), g(x)),$$

$$M(x) = \max(f(x), g(x)).$$

- Montrer que si f et g sont croissantes sur I , alors il en est de même pour les deux fonctions m et M .

✚ **Exercice 28.** *Une équation avec la partie entière*

- Déterminer toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x , on a $f(x) + f(x - E(x)) = 0$.

✚ **Exercice 29.** *Un polynôme du quatrième degré*

- Déterminer la fonction polynomiale f du quatrième degré telle que

$$f(-1) = 1, \quad f'(-1) = 1, \quad f''(-1) = 3,$$

$$f^{(3)}(-1) = 4, \quad f^{(4)}(-1) = 5.$$

✚ **Exercice 30.** *Une dérivée n -ème trigonométrique*

- Déterminer la dérivée n -ème $f^{(n)}$ de la fonction

$$f(x) = \cos 2x - \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

définie pour tout nombre réel x .

✚ **Exercice 31.** *Dérivées successives de $1/(x^2 - 1)$*

Pour tout $n \geq 1$, on désigne par $f^{(n)}$ la dérivée n -ème de f .

- Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ est dérivable en tout point $x \neq -1, 1$ et que, pour tout tel x et tout entier $n \geq 1$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n! P_n(x)}{2(x^2 - 1)^{n+1}}$$

pour un certain polynôme P_n .

✚ **Exercice 32.** *Formule de Leibniz*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $f^{(n)}$ la dérivée n -ème de f , et par commodité $f^{(0)} = f$.

- (1) Soient f et g deux fonctions dérivables jusqu'à l'ordre n . Montrer que

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

- (2) (*Application*) Déterminer la dérivée n -ème de la fonction $x \mapsto (x^2 + 3x - 1) \sin x$.

✚ **Exercice 33.** *Étude d'une fonction trigonométrique*

Soit f la fonction de $[-\pi, \pi]$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x$.

- (1) Étudier f et tracer sa courbe représentative.
- (2) Déterminer graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ de l'équation

$$(E) : \sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = m.$$

✚ **Exercice 34.** *Dérivabilité à un ordre fini*

- Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable 99 fois sur $\mathbb{R}$ mais n'admettant pas de dérivée 100-ème ?

PRISE D'INITIATIVE

✚ **Exercice 35.** *Trois limites à calculer*

- Calculer chacune des limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 + 1} \right),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{4} + \arctan\left(\frac{x}{1-x}\right) \right),$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\arctan(x) - \frac{\pi}{4}} - \frac{2}{x-1} \right).$$

✚ **Exercice 36.** Une équation fonctionnelle dérivable

- Déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (x, h) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + h^4) = f(x) + h^3 f(h).$$

✚ **Exercice 37.** Une tangente en deux points

On considère la fonction $f : x \mapsto x^4 - 2x^2 - x$.

- Prouver qu'il existe une droite (T) et une seule, dont on précisera l'équation, tangente à la courbe (C_f) en deux points distincts.

✚ **Exercice 38.** Dérivée minorée et bijection

- Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $(\forall x \in \mathbb{R}), f'(x) \geq k$ avec $k \in \mathbb{R}^{*+}$. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
- Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $(\forall x \in \mathbb{R}), g'(x) > 0$. Peut-on affirmer que g est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$? Justifier la réponse.

✚ **Exercice 39.** Dérivée seconde d'une réciproque

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x - 8$.

- Montrer que f^{-1} est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $(f^{-1})''(2)$.

✚ **Exercice 40.** Une valeur intermédiaire unique

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $(\forall x \in]a, b[), f'(x) \neq 0$.

- Montrer qu'il existe un unique $c \in]a, b[$ tel que

$$f(c) = \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

✚ **Exercice 41.** Une inégalité polynomiale

Soit $n \geq 2$ un entier naturel.

- Prouver que si $0 < x < \frac{n}{n+1}$, alors

$$1 - 2x^n + x^{n+1} < (1 - x^n)^{n+1}.$$

✚ **Exercice 42.** Une minoration de la dérivée

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ et dérivable

sur $]0, 1[$ telle que $f(0) = f(1) = 0$ et telle qu'il existe $x_0 \in]0, 1[$ vérifiant $f(x_0) = 1$.

- Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $|f'(c)| \geq 2$.

✚ **Exercice 43.** Une fonction définie par sa dérivée

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ telle que $f(1) = 1$ et $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}), f'(x) = \frac{x-1}{x}$.

- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(\sqrt{x+1}) - f(\sqrt{x})) = 0$.

- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $g(x) = x - f(x)$.

- Montrer que $(\forall x \in [1, +\infty[), 0 \leq g(x) \leq \sqrt{x} - 1$.

- Prouver que $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}), g(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}g(x)$, puis en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$.

✚ **Exercice 44.** Un produit de deux dérivées

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a, b, c \in]0, 1[$ tels que

$$f'(a) \times f'(b) = \frac{1 - c^{n+1}}{1 - c} \times c^n.$$

✚ **Exercice 45.** Une minoration linéaire

Soit f une fonction dérivable sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$ et $(\forall x \in [0, 1]), f'(x) > 0$.

- Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $(\forall x \in [0, 1]), f(x) \geq kx$.

✚ **Exercice 46.** Limite de la dérivée et accroissements

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = L$ avec $L \in \mathbb{R}$.

- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = L$. La réciproque est-elle exacte ?

✚ **Exercice 47.** Dérivée bornée et limite nulle

- Soit f une fonction dérivable sur $]0, 1[$ telle que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x f'(x) = \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Prouver que $\lambda_2 = 0$.

- Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et bornée telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = L \in \mathbb{R}$. Montrer que $L = 0$.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

✚ **Exercice 48.** Une équation fonctionnelle multiplicative

- Déterminer toutes les fonctions $f :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ telles que, pour tout couple (x, y) de réels strictement positifs,

$$f(x \times f(y)) = y \times f(x),$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

✚ **Exercice 49.** Une somme de sinus dominée

Soient $n \geq 2$ un entier naturel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \sin(kx)$, où $a_1, \dots, a_n$ sont des réels. On suppose que pour tout réel x , on a $|f(x)| \leq |x|$.

- Montrer que $|a_1 + 2a_2 + \dots + na_n| \leq 1$.

✚ **Exercice 50.** Une moyenne pondérée de $f(a)$ et $f(b)$

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $ab > 0$. On considère une fonction f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

- Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{b f(a) - a f(b)}{b - a} = f(c) - c f'(c).$$

✚ **Exercice 51.** Longueur minimale d'un intervalle

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a, b[$ telle que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$$

et $(\forall x \in]a, b[), 1 + f'(x) + (f(x))^2 \geq 0$.

- Montrer que $b - a \geq \pi$.

✚ **Exercice 52.** Composées en progression arithmétique

Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ une fonction continue telle que pour tout réel $x > 0$, on a $xf(f(x)) = (f(x))^2$, et telle que la limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ existe (finie ou infinie).

- Montrer que f est une fonction bijective.
- Montrer que les suites de termes généraux

$$\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f(x)}_{n \geq 1 \text{ fois}} \quad \text{et} \quad \underbrace{f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}(x)}_{n \geq 1 \text{ fois}}$$

sont en progression arithmétique pour tout réel $x > 0$.

- Donner la forme explicite de la fonction f .

Fin de la série — Saad Choukri, Terminale SM