

بسم الله الرحمن الرحيم



LIMITES DES SUITES

نهايات المتاليات

Chapitre II — Série d'exercices

Saad Choukri

Terminale SM



✦ Exercice 1. Une somme à termes variables

On considère la suite $(L_n)_{n \geq 1}$ de terme général

$$L_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}.$$

- Montrer que cette suite est une suite convergente.

✦ Exercice 2. Opérations sur les limites

- (1) Montrer que la somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est divergente.
- (2) Soit (u_n) une suite numérique à valeurs réelles. Montrer que si la suite (u_n) converge vers l , alors la suite $(|u_n|)$ converge vers $|l|$.
- (3) Soit $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n}$. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?
- (4) Soit (u_n) une suite numérique à valeurs réelles telle que les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite l . Montrer que la suite (u_n) est convergente et que sa limite vaut l .

✦ Exercice 3. Encadrement d'une somme

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général

$$u_n = \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^4+2}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}.$$

- Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

✦ Exercice 4. Une forme quadratique

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n^2 + u_n v_n + v_n^2 \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

- Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) convergent et déterminer leurs limites.

✦ Exercice 5. Un cas des séries de Riemann

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

- (1) En considérant les deux suites (x_n) et (y_n) de termes généraux $x_n = u_n - 2\sqrt{n}$ et $y_n = u_n - 2\sqrt{n+1}$, montrer que la suite (u_n) est divergente.
- (2) Proposer une autre méthode pour montrer que la suite (u_n) est divergente, puis déterminer sa limite.

✦ Exercice 6. La série harmonique

On considère la suite de terme général

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

- Montrer que la suite (H_n) diverge et que sa limite vaut $+\infty$.

✦ Exercice 7. Moyennes de Cesàro

- (1) Soit (u_n) une suite numérique à valeurs réelles convergeant vers l . On appelle m_n la moyenne arithmétique des u_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, c'est-à-dire

$$m_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$

Montrer que la suite $(m_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite vaut l .

- (2) (*Application*) Soit (x_n) une suite numérique telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = l$. Montrer que la suite de terme général $\frac{x_n}{n}$ est convergente et que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = l$.

✦ **Exercice 8.** Une série alternée

On définit la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par son terme général

$$A_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}.$$

- Montrer que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

✦ **Exercice 9.** Une suite à deux paramètres

Soient a et b deux réels tels que $|a| \neq |b|$.

- Étudier la convergence et déterminer la limite, lorsqu'elle existe, de la suite définie par son terme général

$$u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}.$$

✦ **Exercice 10.** Un critère de D'Alembert

Soit (u_n) une suite numérique à valeurs strictement positives telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha$.

- (1) Montrer que si $\alpha < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.
- (2) Montrer que si $\alpha > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$.
- (3) Que peut-on dire si $\alpha = 1$?
- (4) (*Application*) Étudier la convergence des suites de termes généraux $u_n = \frac{n^k}{x^n}$ et $v_n = \frac{x^n}{n!}$, où k est un entier naturel non nul et x un réel strictement positif.

✦ **Exercice 11.** La suite exponentielle

On considère la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général

$$e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

- Montrer que la suite (e_n) converge.

✦ **Exercice 12.** Inverses des coefficients binomiaux

Pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on pose $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

- Déterminer la limite de la suite de terme général

$$N_n = \frac{1}{\binom{n}{0}} + \frac{1}{\binom{n}{1}} + \cdots + \frac{1}{\binom{n}{n}}.$$

✦ **Exercice 13.** Un produit à paramètre

Soit $a > 0$ un nombre réel. On considère la suite (P_n)

de terme général

$$P_n = \prod_{k=1}^n (1 + a^{2^k}) = (1+a)(1+a^2) \cdots (1+a^{2^n}).$$

- Discuter, suivant la valeur du paramètre a , la nature de la suite (P_n) et déterminer sa limite lorsqu'elle existe.

✦ **Exercice 14.** Suites adjacentes et moyennes

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

- Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

✦ **Exercice 15.** Deux équations fonctionnelles

Soit $a > 1$ un nombre réel.

- (1) Déterminer toutes les fonctions f continues en zéro vérifiant, pour tout réel x , $f(ax) = f(x)$.
- (2) Déterminer toutes les fonctions f dérivables en zéro vérifiant, pour tout réel x , $f(ax) = af(x)$.

✦ **Exercice 16.** Une suite récurrente

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 \geq 0$ et, pour tout entier naturel non nul n ,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

- Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

✦ **Exercice 17.** Partie entière et moyenne

Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général

$$E_n = \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^n \frac{\lfloor k^2 \sqrt{k} \rfloor}{k^2 \sqrt{k}},$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x .

- Montrer que la suite (E_n) est convergente.

✦ **Exercice 18.** Couple de suites récurrentes

Soient (x_n) et (y_n) deux suites réelles. On suppose que $x_0 < y_0$ et que, pour tout entier naturel n ,

$$x_{n+1} = \frac{2x_n + y_n}{3}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + 2y_n}{3}.$$

- Montrer que les deux suites (x_n) et (y_n) sont convergentes, de même limite, que l'on précisera.

✦ **Exercice 19.** Une croissance en a_n/n

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite définie par $a_1 = 2$ et, pour tout entier naturel non nul n ,

$$a_{n+1} = a_n + \sqrt{1 + \frac{a_n}{n}}.$$

- Montrer que la suite de terme général $\frac{a_n}{n}$ est convergente.

✦ **Exercice 20.** Suite arithmétique et somme

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite arithmétique à termes positifs. On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 1$.

- Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_{n+k}}$$

est convergente.

✦ **Exercice 21.** Suites convergentes et bornées

- Montrer que toute suite convergente est bornée. La réciproque est-elle vraie ?

✦ **Exercice 22.** Une suite de chiffres répétés

- Déterminer la limite éventuelle de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$x_n = \frac{a + aa + aaa + \cdots + \underbrace{aa \dots a}_{n \text{ chiffres}}}{10^n}.$$

✦ **Exercice 23.** Un produit de sinus

Soit a un nombre réel non nul. On définit la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par son terme général

$$P_n = \prod_{k=0}^n \sin(2^k a).$$

- (1) Montrer que pour tout réel x , on a $|\sin x \times \sin(2x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- (2) En déduire le calcul de la limite de la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

✦ **Exercice 24.** Suites à valeurs entières

- (1) Soit (u_n) une suite à valeurs dans l'ensemble des entiers $\mathbb{Z}$. On suppose que la suite (u_n) converge. Montrer qu'elle est stationnaire.
- (2) La suite (u_n) est convergente. La suite $(\lfloor u_n \rfloor)$ est-elle convergente ?

✦ **Exercice 25.** Radicaux itérés

Soit a un réel strictement positif et $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$r_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}}},$$

où a apparaît n fois dans l'expression.

- Étudier la nature de la suite (r_n) et donner sa limite éventuelle.

✦ **Exercice 26.** Une somme de cubes

Soient n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = (x-n)^3 + (x-n+1)^3 + \cdots + x^3 - (x+1)^3 - (x+2)^3 - \cdots - (x+n)^3.$$

- Montrer que pour tout entier naturel non nul n , il existe un unique réel α_n tel que $f_n(\alpha_n) = 0$, puis déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$.

✦ **Exercice 27.** Une moyenne de type convolution

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites et a, b deux nombres réels tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = b$.

- Montrer que la suite de terme général

$$\frac{u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \cdots + u_n v_1}{n}$$

converge et que sa limite vaut ab .

✦ **Exercice 28.** Une limite à paramètres entiers

Soient $a \geq 2$ et k deux entiers naturels.

- Déterminer la limite de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ de terme général

$$a_n = \frac{(a^{k+1} - 1)^n - a^{kn}}{a^{kn}(a^n - 1)}.$$

✦ **Exercice 29.** Une équation fonctionnelle

- Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues et vérifiant, pour tout nombre réel x ,

$$f(2x) = f(x) \cos x.$$

✦ **Exercice 30.** Une récurrence quadratique

Soit a un nombre réel et $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite numérique telle que $a_1 \in \mathbb{R}$ et, pour tout entier naturel non nul n ,

$$a_{n+1} = a_n^2 + (1 - 2a)a_n + a^2.$$

- Déterminer toutes les valeurs du réel a_1 pour lesquelles la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ converge, puis calculer dans ce cas sa limite.

✦ **Exercice 31.** Une récurrence avec radical

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + k^n}$$

pour tout entier naturel n , où $k \in]0, 1[$ est un nombre réel.

- Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer la valeur de sa limite en fonction de k .

✦ Exercice 32. Une fraction continue

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n}.$$

- Montrer que cette suite est convergente.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

✦ Exercice 33. Racine d'un polynôme

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on considère la fonction polynomiale définie par

$$P_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1.$$

- (1) Démontrer que P_n possède une unique racine dans $\mathbb{R}^+$, qu'on notera α_n , puis montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est convergente.
- (2) Démontrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ converge vers $1/2$.

✦ Exercice 34. Une suite itérée

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue.

- Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in [0, 1]$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout entier naturel n converge si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0.$$

✦ Exercice 35. Convergence de $\sqrt[n]{n}$

Soit $(u_n)_{n \geq 2}$ la suite de terme général $u_n = \sqrt[n]{n}$. Soit $a > 1$ un nombre réel. On pose $n_0 = E\left(\frac{2}{a-1}\right)$ et on considère la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $x_n = \frac{n}{a^n}$.

- (1) Montrer que pour tout $n \geq n_0$, on a $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{a+1}{2a}$.
- (2) En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ converge et déterminer sa limite.
- (3) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est décroissante, puis en déduire qu'elle converge.
- (4) Montrer que la limite l de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ vaut 1 en utilisant le résultat de la première partie.

✦ Exercice 36. Étude de deux suites adjacentes

On considère les deux suites $(a_n)_{n \geq 2}$ et $(b_n)_{n \geq 2}$ définies par

$$a_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{2^3}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right),$$

$$b_n = a_n \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

- (1) Montrer que la suite (a_n) est bornée et qu'elle est monotone.
- (2) Montrer que pour tout nombre réel x , on a $\cos^2 x \geq \cos(2x)$.
- (3) Montrer que la suite (b_n) est croissante.
- (4) Montrer que les deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
- (5) On considère la suite $(c_n)_{n \geq 2}$ définie par $c_n = a_n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ pour tout $n \geq 2$.
 - (a) Montrer que la suite (c_n) est une suite géométrique.
 - (b) En déduire la limite l de la suite (a_n) .
 - (c) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}), |1 - \cos x| \leq \frac{x^2}{2}$.
 - (d) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, on a

$$0 \leq a_n - l \leq \frac{\pi^2}{2^{2n+1}}.$$

✦ Exercice 37. Séries alternées et arctangente

Pour tout entier naturel n , on pose

$$u_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1}, \quad v_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k+1},$$

et soit F_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}.$$

- (1) Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
- (2) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a

$$F'_n(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

- (3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $F_{2n+1}(x) \leq \arctan x \leq F_{2n}(x)$.
- (4) En déduire la limite commune des deux suites (u_n) et (v_n) .



Fin de la série — Saad Choukri, Terminale SM