

بسم الله الرحمن الرحيم



LIMITES ET CONTINUITÉ

النهايات والاتصال

Chapitre I — Série d'exercices

Saad Choukri

Terminale SM



✦ Exercice 1. *Minoration multiplicative*

Soient f et g deux fonctions numériques continues sur un segment $[a, b]$, où $a < b$. On suppose que $f > g > 0$.

- Montrer qu'il existe une constante $\lambda > 1$ telle que $f \geq \lambda g$.

✦ Exercice 2. *Limites et périodicité*

- (1) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
- (2) On considère une fonction continue périodique admettant une limite en $+\infty$. Que peut-on dire de cette fonction ?
- (3) Montrer que la fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$.
- (4) Justifier pourquoi la fonction cosinus n'est pas une fonction polynomiale.

✦ Exercice 3. *Injectivité et stricte monotonie*

Soit f une fonction continue définie sur un intervalle I à valeurs réelles.

- Montrer que si f est injective, alors f est strictement monotone.

✦ Exercice 4. *Barycentre de valeurs*

Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$, soient $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$ tels que $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$.

- Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n).$$

✦ Exercice 5. *Limite d'une fonction bornée*

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

- Montrer que pour tout entier naturel non nul n , on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(\sin x)}{x^n} = 0.$$

✦ Exercice 6. *Équation de Cauchy*

Soit f une fonction numérique vérifiant, pour tous réels x et y ,

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

On suppose que la fonction f est continue à gauche en zéro.

- Prouver que f est continue partout sur $\mathbb{R}$.

✦ Exercice 7. *Une involution non continue*

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique vérifiant $g \circ g = -\text{Id}_{\mathbb{R}}$.

- Montrer que la fonction g ne peut pas être continue sur $\mathbb{R}$.

✦ Exercice 8. *Une somme de distances*

Soient $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels de l'intervalle $[0, 1]$.

- Montrer que l'équation

$$(E) : \frac{|x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_n|}{n} = \frac{1}{2}$$

admet au moins une solution dans l'intervalle $[0, 1]$.

✦ **Exercice 9.** *Point fixe et contraction stricte*

Soit f une fonction numérique définie de $[a, b]$ vers $[a, b]$ telle que pour tous $x, y \in [a, b]$ avec $x \neq y$, on a

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|.$$

- Montrer que la fonction f admet un unique point fixe.

✦ **Exercice 10.** *Cas d'égalité $|f| = |g|$*

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I telles que $|f| = |g| > 0$.

- Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

✦ **Exercice 11.** *Absence de point fixe*

Soit f une fonction numérique continue sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \neq x$.

- Montrer que l'équation $f \circ f(x) = x$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

✦ **Exercice 12.** *Dérivabilité et continuité*

- (1) Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable, montrer qu'elle est continue. La réciproque est-elle toujours vraie ?
- (2) Donner un exemple d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ non dérivable en une infinité de points.

✦ **Exercice 13.** *Bijections continues*

- (1) Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$.
- (2) Montrer qu'il existe une bijection continue entre $\mathbb{R}$ et $] -1, 1[$.
- (3) Montrer qu'il existe une bijection continue entre $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $] -1, 1[$.

✦ **Exercice 14.** *Annulation et limites aux bornes*

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- Montrer que la fonction f s'annule sur $\mathbb{R}$.

✦ **Exercice 15.** *Isométries de $\mathbb{R}$*

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant, pour tous réels x et y ,

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|.$$

✦ **Exercice 16.** *Monotonie croisée*

Soit f une fonction décroissante sur $]0, +\infty[$. On suppose que la fonction $x \mapsto xf(x)$ est croissante sur $]0, +\infty[$.

- Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.

✦ **Exercice 17.** *Un produit identiquement nul*

Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant, pour tout $x > 0$,

$$f(x) \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

- Montrer que la fonction f est identiquement nulle.

✦ **Exercice 18.** *Extremum local et valeurs égales*

Soit I un intervalle ouvert sur lequel une fonction f est continue. On suppose de plus que f admet un extremum local sur l'intervalle I .

- Montrer qu'il existe deux éléments a et b de I tels que $f(a) = f(b)$.

✦ **Exercice 19.** *Deux fonctions de même image*

Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$, où $a < b$. On suppose que pour tout $x \in [a, b]$, il existe $y \in [a, b]$ tel que $f(x) = g(y)$.

- Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = g(c)$.

✦ **Exercice 20.** *Continuité et point fixe*

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, avec $a \leq b$. On suppose que $[a, b] \subset f([a, b])$.

- Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

✦ **Exercice 21.** *Une généralisation du T.V.I.*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- Montrer que la fonction f est surjective.

✦ **Exercice 22.** *Continuité et surjectivité*

- (1) Donner un exemple d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ prenant exactement trois fois chacune des valeurs de $\mathbb{R}$.
- (2) Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et surjective.
 - (a) Montrer que f s'annule une infinité de fois.
 - (b) Montrer que f prend une infinité de fois chacune des valeurs de $\mathbb{R}$.

✦ **Exercice 23.** *Cordes horizontales*

- (1) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (où $a < b$) une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$. Montrer que l'équation

$$f(x) = f\left(x + \frac{b-a}{2}\right)$$

d'inconnue x admet au moins une solution dans $[a, b]$.

- (2) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$.
Montrer que pour tout entier naturel n , il existe un réel $x_n \in [0, 1]$ vérifiant

$$f\left(x_n + \frac{1}{n+1}\right) = f(x_n).$$

✚ **Exercice 24.** *Théorème du point fixe*

Soient $k \in]0, 1[$ une constante réelle et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

- Montrer que f admet un unique point fixe dans $\mathbb{R}$.

✚ **Exercice 25.** *Croissance asymptotique linéaire*

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

- Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}^+$.

✚ **Exercice 26.** *Paramètre entier et limite finie*

Soient n un entier relatif et f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\sin(x-1)}{|x-1| \times (x-1)^n}$$

pour tout réel x différent de 1.

- Déterminer l'ensemble des valeurs que peut prendre n pour que la fonction f admette une limite finie en $x_0 = 1$.

✚ **Exercice 27.** *Limites nulles aux infinis*

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

- Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

✚ **Exercice 28.** *Des radicaux itérés*

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{4(1 - \sqrt{\sqrt{x}})} - \frac{1}{8(1 - \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}})}$$

pour tout $x \neq 1$.

- Montrer que la fonction f admet une limite finie en $x_0 = 1$, qu'on déterminera.

✚ **Exercice 29.** *Domaine de définition et limites*

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x-1}.$$

- (1) Déterminer D_f , l'ensemble de définition de la fonction f , puis calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
- (2) La fonction f admet-elle une limite finie en $x_0 = 1$? Justifier.

✚ **Exercice 30.** *Limite de $f + 1/f$*

Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow]0, +\infty[$ une fonction telle que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) + \frac{1}{f(x)} \right) = 2.$$

- (1) Montrer que f admet une limite finie en $x_0 = 0$, dont on déterminera la valeur.
- (2) La fonction $g : x \mapsto E(f(x))$ admet-elle une limite finie quand x tend vers 0 ? Si la réponse est positive, que vaut cette limite ?

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

✚ **Exercice 31.** *Fonctions qui commutent*

Soient f et g deux fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$. On suppose de plus que

$$f \circ g = g \circ f.$$

- Montrer qu'il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que $f(\alpha) = g(\alpha)$.

✚ **Exercice 32.** *Une inéquation fonctionnelle*

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ telle que

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, \quad |f(y) - f(x)| \geq |x - y|.$$

- Montrer que $f = \text{id}$ ou $f = 1 - \text{id}$.

✚ **Exercice 33.** *Une application du T.V.I.*

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(0) = f(1)$.

- (1) Soit n un entier naturel non nul et $a = 1/n$. Montrer que l'équation $f(x+a) = f(x)$ admet au moins une solution.
- (2) En donnant un exemple de fonction, montrer que si $a \in]0, 1[$ n'est pas de la forme $1/n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), l'équation $f(x+a) = f(x)$ peut ne pas admettre de solution.
- (3) (*Applications*) Un cycliste parcourt 20 km en une

heure.

- (a) Montrer qu'il existe au moins un intervalle de temps de durée une demi-heure pendant lequel il a parcouru 10 km.
- (b) Montrer qu'il existe au moins un intervalle de temps de durée 3 min pendant lequel il a parcouru 1 km.
- (c) Montrer qu'il n'existe pas nécessairement un intervalle de temps de durée 45 min pendant lequel il a parcouru 15 km.

✦ **Exercice 34.** Une fonction définie par conditions

Soient f une fonction continue et strictement croissante sur le segment $I = [a, b]$ et α un nombre réel appartenant à $[0, 1]$. On suppose de plus que $f(a) = 0$.

- (1) Montrer que

$$(\forall x \in I)(\exists! y \in I), \quad f(y) = \alpha f(x).$$

- (2) Soit $\varphi_\alpha : I \rightarrow I$ l'application définie par $\varphi_\alpha(x) = y$, où y est le réel de I vérifiant $f(y) = \alpha f(x)$.

- (a) Montrer que pour tout $x \in I$, on a $\varphi_\alpha(x) \leq x$.

- (b) On suppose que $\alpha \in [0, 1[$. Montrer que

$$(\forall x \in I), \quad \varphi_\alpha(x) = x \iff x = a.$$

- (3) Montrer que la fonction φ_α est continue sur I .

✦ **Exercice 35.** Distance d'un point à $\mathbb{Z}$

Pour un nombre réel x , on note $d(x)$ sa distance à $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire

$$d(x) = \min_{p \in \mathbb{Z}} |x - p|.$$

- (1) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}), 0 \leq d(x) \leq \frac{1}{2}$.
- (2) Montrer que la fonction $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto d(x)$ est une fonction paire.
- (3) Montrer que la fonction d est 1-périodique.
- (4) En déduire que $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall k \in \mathbb{Z}), d(x + k) = d(x)$.
- (5) Montrer que

$$d(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1/2], \\ 1 - x & \text{si } x \in]1/2, 1]. \end{cases}$$

- (6) Étudier la continuité de la fonction d sur $\mathbb{R}$.
- (7) Soit x un nombre réel. Montrer que l'ensemble $\{d(nx), n \in \mathbb{N}^*\}$ est fini si et seulement si x est un nombre rationnel.
- (8) Soit x un nombre réel irrationnel et $\alpha = d(x)$.
 - (a) Montrer que $\alpha \in]0, 1/2[$.
 - (b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*), d(nx) = d(n\alpha)$.

Fin de la série — Saad Choukri, Terminale SM