

DEVOIR SURVEILLÉ N° 8 — MODÈLE 4

Probabilités — Probabilités conditionnelles et suites — Groupes — Arithmétique — Intégrales

2^{ème} Bac Sciences Maths • Durée 4 heures • Barème sur 20 • Prof. Saad Choukri

Exercice 1 (3,5 points)

On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de 4 compartiments également numérotés de 1 à 4, où $n \geq 4$. On lance simultanément les n boules dans la boîte ; chaque boule vient se ranger aléatoirement et indépendamment dans l'un des 4 compartiments, et chaque compartiment peut éventuellement contenir plusieurs boules. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lancer des boules, associe le nombre de compartiments restés vides.

- (1) Déterminer $X(\Omega)$, l'ensemble des valeurs de X . (0,25 pt)
- (2) Calculer $p(X = 3)$. (0,5 pt)
- (3) Calculer $p(X = 2)$. (0,75 pt)
- (4) Calculer $p(X = 1)$. (0,75 pt)
- (5) En déduire $p(X = 0)$. (0,25 pt)
- (6) Montrer que $E(X) = 4 \left(\frac{3}{4} \right)^n$, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X)$ et interpréter ce résultat. (1 pt)

Exercice 2 (3 points)

On dispose de deux boîtes U et V . La boîte U contient 4 boules rouges et 4 boules bleues, et la boîte V contient 2 boules rouges et 4 boules bleues, toutes indiscernables au toucher. On considère l'épreuve suivante : on tire au hasard une boule de la boîte U ; si elle est rouge on la met dans la boîte V puis on tire au hasard une boule de V ; si elle est bleue on la pose de côté puis on tire une boule de V . On considère les événements R_U « la boule tirée de U est rouge », B_U « la boule tirée de U est bleue », R_V « la boule tirée de V est rouge » et B_V « la boule tirée de V est bleue ».

- (1) Calculer la probabilité de chacun des deux événements R_U et B_U . (0,5 pt)
- (2)
 - (a) Calculer la probabilité de l'événement B_V sachant que R_U est réalisé. (0,5 pt)
 - (b) Calculer la probabilité de l'événement B_V sachant que B_U est réalisé. (0,5 pt)
- (3) Montrer que la probabilité de l'événement B_V est $\frac{13}{21}$. (1 pt)
- (4) En déduire la probabilité de l'événement R_V . (0,5 pt)

Exercice 3 (3,5 points)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 . L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires, et l'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires. On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes : on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie, on note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient ; si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 , sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2 . Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on note B_n l'événement « la boule tirée au n -ième tirage est blanche » et on pose $p_n = p(B_n)$.

- (1) Calculer p_1 . (0,5 pt)
- (2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; p_{n+1} = \frac{-6}{35} p_n + \frac{4}{7}$. (1 pt)

(3) En déduire l'expression de p_n pour tout n de $\mathbb{N}^*$, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$. (1,5 pt)

(4) Pour tout n de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ on note q_n la probabilité que le n -ième tirage se fasse dans l'urne U_1 .
Exprimer q_n en fonction de p_{n-1} , puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n$. (0,5 pt)

✦ Exercice 4 _____ (3 points)

Soit α un réel non nul. On munit l'ensemble $G = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$ définie par

$$(\forall (x, y) \in G) (\forall (x', y') \in G); (x, y) * (x', y') = (xx'; x^\alpha y' + x'y)$$

(1) Montrer que $(G, *)$ est un groupe, et qu'il est commutatif si et seulement si $\alpha = 1$. (1,25 pt)

(2) On considère l'ensemble $ID = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x^\alpha & y \\ 0 & x \end{pmatrix} / (x, y) \in G \right\}$. Montrer que ID est une partie stable de $(IM_2(\mathbb{R}), \times)$. (0,5 pt)

(3) Soit ψ l'application définie de G vers ID par $\psi(x, y) = M(x, y)$. Montrer que ψ est un isomorphisme de $(G, *)$ vers $(ID, \times)$, puis en déduire la structure de $(ID, \times)$ et l'inverse de toute matrice $M(x, y)$ de ID . (1,25 pt)

✦ Exercice 5 _____ (3 points)

Soit p un nombre premier.

(1) Montrer que pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p-1$, le nombre $\binom{p}{k}$ est divisible par p . (1 pt)

(2) En déduire que $(\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2); (a+b)^p \equiv a^p + b^p [p]$. (0,75 pt)

(3) En déduire, par récurrence, que $(\forall a \in \mathbb{N}); a^p \equiv a [p]$. (0,75 pt)

(4) Application : déterminer le reste de la division euclidienne de 2^{2016} par 7. (0,5 pt)

✦ Exercice 6 _____ (4 points)

Soit F la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

(1) Montrer que F est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que $F'(x) = \frac{e^x}{x}$, puis dresser le tableau de variations de F . (0,75 pt)

(2) Montrer que $(\forall x \geq 1); e \ln x \leq F(x) \leq e^x \ln x$. (0,75 pt)

(3) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$, puis calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$. (0,75 pt)

(4) Montrer que F réalise une bijection de $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$. (0,75 pt)

(5) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ il existe un unique α_n de $]0; +\infty[$ tel que $F(\alpha_n) = n$, puis montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et déterminer sa limite. (1 pt)



EXERCICES BONUS



— **Exercice bonus n° 1** (2 pt)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n , indiscernables au toucher, où $n \geq 2$. On tire simultanément deux boules de l'urne et on note X le plus grand des deux numéros obtenus.

(1) Déterminer la loi de probabilité de X . (1 pt)

(2) Montrer que $E(X) = \frac{2(n+1)}{3}$. (1 pt)

— **Exercice bonus n° 2** (2 pt)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0; 1; \dots; n\}$.

(1) Montrer que $E(X) = \sum_{k=1}^n p(X \geq k)$. (1,25 pt)

(2) Application : on lance n fois une pièce équilibrée et on note X le nombre de « pile » obtenus. Retrouver $E(X)$ à l'aide de la question précédente pour $n = 3$. (0,75 pt)

— **Exercice bonus n° 3** (2 pt)

Une urne contient N boules indiscernables au toucher dont M sont blanches, où $1 \leq M \leq N$. On tire simultanément n boules de l'urne, où $1 \leq n \leq N$, et on note X le nombre de boules blanches obtenues.

(1) Déterminer la loi de probabilité de X , puis en déduire l'identité $\sum_k \binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k} = \binom{N}{n}$. (1 pt)

(2) Montrer que $E(X) = \frac{nM}{N}$. (1 pt)