
DEVOIR SURVEILLÉ N° 8 — MODÈLE 3

Probabilités — Matrices et corps — Nombres complexes — Équations différentielles et intégrales

2^{ème} Bac Sciences Maths • Durée 4 heures • Barème sur 20 • Prof. Saad Choukri

—❧— Exercice 1 ————— (4 points)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 : l'urne U_1 contient 3 boules blanches et 2 boules noires, et l'urne U_2 contient 1 boule blanche et 4 boules noires, toutes indiscernables au toucher. On considère l'épreuve qui consiste à tirer au hasard 2 boules simultanément de U_1 et 3 boules successivement et sans remise de U_2 .

- (1) On considère l'événement A : « obtenir 5 boules noires ». Montrer que $p(A) = \frac{1}{25}$. (0,75 pt)
- (2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.
 - (a) Déterminer la loi de probabilité de X . (1 pt)
 - (b) Calculer $E(X)$ et $V(X)$. (0,75 pt)
- (3) On répète l'épreuve précédente cinq fois de suite, en remettant à chaque fois les boules tirées dans leurs urnes d'origine. Calculer la probabilité de l'événement B : « A est réalisé exactement 3 fois ». (0,5 pt)
- (4) Après les cinq répétitions, on réalise l'épreuve suivante : si B est réalisé, on mélange les deux urnes et on tire simultanément 2 boules du mélange ; sinon, on tire une boule de chaque urne. On note C l'événement « obtenir deux boules blanches ». Calculer $p_B(C)$ et $p_{\bar{B}}(C)$, puis en déduire $p(C)$. (1 pt)

—❧— Exercice 2 ————— (3 points)

Un sac contient $2n$ boules indiscernables au toucher, où $n \in \mathbb{N}^*$, dont n sont blanches et n sont noires. Un jeu consiste à tirer une boule du sac, à noter sa couleur et à la remettre dans le sac, puis à tirer du même sac une nouvelle boule et à noter aussi sa couleur. La règle du jeu indique que : si les deux boules tirées sont blanches on gagne 20 points ; si elles sont noires on perd 20 points ; si elles sont de couleurs différentes le gain est nul.

- (1) Calculer la probabilité de gagner 20 points, celle de perdre 20 points et celle de réaliser un gain nul. (0,75 pt)
- (2) On répète 5 fois le jeu précédent.
 - (a) Calculer la probabilité de gagner 100 points. (0,5 pt)
 - (b) Calculer la probabilité de gagner 40 points. (1 pt)
- (3) Au cours d'un jeu, on considère la variable aléatoire X qui prend uniquement les valeurs -20 si on perd, 0 si le gain est nul et $+20$ si on gagne.
 - (a) Déterminer la loi de probabilité de X . (0,5 pt)
 - (b) Calculer l'espérance mathématique de X . (0,25 pt)

—❧— Exercice 3 ————— (3 points)

Dans l'anneau $(\text{IM}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, où q est un réel non nul, et l'ensemble $E = \{M \in \text{IM}_2(\mathbb{R}) / MA = AM\}$.

- (1) Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau unitaire. (0,75 pt)
- (2) Montrer que $A^2 = -q \cdot I$, où I est la matrice unité de $\text{IM}_2(\mathbb{R})$. (0,5 pt)
- (3) Montrer que $E = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x & -qy \\ y & x \end{pmatrix} / (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. (0,75 pt)
- (4) On suppose que $q > 0$ et on pose $\omega = i\sqrt{q}$. Montrer que l'application $\varphi : z = x + \omega y \mapsto M(x, y)$ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(E^*, \times)$, puis en déduire que $(E, +, \times)$ est un corps commutatif. (1 pt)

✦ Exercice 4 _____ (3 points)

Soient α et β deux nombres complexes, $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, et pour tout z de $\mathbb{C}$ on pose $f(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z$.

- (1)
- (a) Montrer que $f(1) + f(j) + f(j^2) = 3$. (0,75 pt)
- (b) En déduire que $|f(1)| + |f(j)| + |f(j^2)| \geq 3$. (0,5 pt)
- (c) En déduire que l'un au moins des nombres $|f(1)|$, $|f(j)|$ et $|f(j^2)|$ est supérieur ou égal à 1. (0,5 pt)
- (2) Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère un triangle équilatéral direct ABC de centre O , inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $r > 0$, le point A ayant pour affixe r . Soient I et J deux points de (P) d'affixes respectives a et b , et on pose $\alpha = \frac{-(a+b)}{r}$ et $\beta = \frac{ab}{r^2}$.
- (a) Montrer que les affixes de B et C sont respectivement rj et rj^2 . (0,5 pt)
- (b) Montrer que $BO \cdot BI \cdot BJ = r^3 |f(j)|$, et écrire de même $AO \cdot AI \cdot AJ$ et $CO \cdot CI \cdot CJ$. (0,5 pt)
- (c) En déduire qu'il existe un sommet S du triangle ABC tel que $SO \cdot SI \cdot SJ \geq r^3$. (0,25 pt)

✦ Exercice 5 _____ (2,5 points)

- (1) Résoudre l'équation différentielle $(E) \quad y' = 2y + 8$. (0,5 pt)
- (2) On cherche l'ensemble des fonctions f dérivables sur $]0; +\infty[$ vérifiant

$$(F) \quad (\forall x \in]0; +\infty[); x f'(x) = (2x + 1)f(x) + 8x^2$$

Pour tout x de $]0; +\infty[$ on pose $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

- (a) Montrer que f est solution de (F) si et seulement si g est solution de (E) . (1 pt)
- (b) En déduire l'ensemble des solutions de (F) , puis déterminer la solution h de (F) vérifiant $h(1) = 0$. (1 pt)

✦ Exercice 6 _____ (4,5 points)

Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$.

- (1) Calculer u_0 . (0,5 pt)
- (2) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$. (0,75 pt)
- (3) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$, puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n$. (1,25 pt)
- (4) Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $v_n = \frac{u_n}{n!}$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

- (a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); v_{n+1} = v_n - \frac{1}{(n+1)!}$. (0,75 pt)
- (b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = e - S_n$. (0,75 pt)
- (c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$. (0,5 pt)



EXERCICES BONUS



Facultatifs, non comptés dans la note sur 20 — ils donnent droit à 6 points supplémentaires au maximum.

— Exercice bonus n° 1 (2 pt)

Dans un groupe de n personnes ($2 \leq n \leq 365$), on suppose que les 365 jours de l'année sont équiprobables comme jour d'anniversaire et que les personnes sont indépendantes. On note p_n la probabilité qu'au moins deux personnes du groupe aient le même jour d'anniversaire.

- (1) Exprimer p_n en fonction de n . (1 pt)
- (2) Montrer que la suite (p_n) est croissante, puis déterminer le plus petit entier n tel que $p_n \geq \frac{1}{2}$. (On donne $p_{22} \simeq 0,476$ et $p_{23} \simeq 0,507$.) (1 pt)

— Exercice bonus n° 2 (2 pt)

On écrit n lettres destinées à n personnes distinctes et on les place au hasard dans les n enveloppes correspondantes, une lettre par enveloppe. On note p_n la probabilité qu'aucune lettre ne se trouve dans la bonne enveloppe.

- (1) Montrer que $p_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$. (1,25 pt)
- (2) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$. (0,75 pt)

— Exercice bonus n° 3 (2 pt)

Une urne contient des boules blanches et des boules noires, la proportion de boules blanches étant égale à p , où $p \in]0; 1[$. On tire au hasard une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne ; on répète l'expérience jusqu'à obtenir pour la première fois une boule blanche. Soit X la variable aléatoire égale au rang du tirage où l'on obtient cette première boule blanche.

- (1) Déterminer la loi de probabilité de X et vérifier que $\sum_{k=1}^{+\infty} p(X = k) = 1$. (1 pt)
- (2) Montrer que $E(X) = \frac{1}{p}$. (1 pt)

