

DEVOIR SURVEILLÉ N° 8 — MODÈLE 2

Probabilités — Arithmétique — Structures algébriques — Sommes de Riemann

2^{ème} Bac Sciences Maths • Durée 4 heures • Barème sur 20 • Prof. Saad Choukri

Exercice 1 (4 points)

Une boîte contient 2 boules blanches et $n - 2$ boules rouges indiscernables au toucher, où $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 4$. On tire au hasard une boule de la boîte, on note sa couleur et on ne la remet pas ; on répète la même expérience jusqu'à obtenir pour la première fois une boule blanche, et on arrête alors l'expérience. Soit X la variable aléatoire égale au rang du tirage auquel l'expérience s'est arrêtée.

(1)

(a) Déterminer $X(\Omega)$, l'ensemble des valeurs de X . (0,25 pt)

(b) Calculer $p(X = 1)$, $p(X = 2)$ et $p(X = 3)$. (0,75 pt)

(2)

(a) Montrer que $(\forall k \in X(\Omega)); p(X = k) = \frac{2(n - k)}{n(n - 1)}$. (0,75 pt)

(b) Sachant que $(\forall m \in \mathbb{N}^*); \sum_{k=1}^m k^2 = \frac{m(m + 1)(2m + 1)}{6}$, montrer que $E(X) = \frac{n + 1}{3}$. (1 pt)

(3) Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges restant dans la boîte au moment où l'on obtient la première boule blanche. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$. (1,25 pt)

Exercice 2 (3 points)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n , indiscernables au toucher, où $n \geq 6$. On tire au hasard une seule boule de cette urne et on considère les événements

A : « obtenir un nombre pair » B : « obtenir un multiple de 3 »

(1) Déterminer toutes les valeurs de n pour lesquelles A et B sont indépendants. (1 pt)

(2) Soient p et q deux nombres premiers distincts et on suppose $n \geq pq$. On considère les événements A : « obtenir un multiple de p » et B : « obtenir un multiple de q ». Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur n pour que A et B soient indépendants. (1 pt)

(3) On suppose dans cette question que p et q sont deux entiers naturels tels que $p \geq 2$, $q \geq 2$ et $p \neq q$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur n pour que A et B soient indépendants. (1 pt)

Exercice 3 (3 points)

(1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) $61x - 33y = 1$.

(a) Vérifier que $61 \wedge 33 = 1$. (0,25 pt)

(b) Vérifier que $(13; 24)$ est une solution de (E), puis résoudre (E). (0,75 pt)

(2) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose $A_n = \underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ fois}}$ écrit dans le système décimal.

(a) Montrer que 61 divise A_{60} . (0,75 pt)

(b) Montrer que 7 divise A_6 , puis que 7 divise A_n si et seulement si 6 divise n . (0,75 pt)

(c) Montrer que A_5 est divisible par 41.

(0,5 pt)

—❧— **Exercice 4** ————— (3 points)

Soit (p, q) un couple de $\mathbb{R}^2$ et on considère dans $\text{IM}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble

$$E = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ qy & x + py \end{pmatrix} / (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

(1) Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\text{IM}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ et déterminer $\dim E$.

(0,75 pt)

(2) On pose $I = M(1, 0)$ et $J = M(0, 1)$. Montrer que $J^2 = q \cdot I + p \cdot J$.

(0,75 pt)

(3) Montrer que E est une partie stable de $(\text{IM}_2(\mathbb{R}), \times)$, puis que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.

(0,75 pt)

(4) Montrer que $(E, +, \times)$ est un corps si et seulement si $p^2 + 4q < 0$.

(0,75 pt)

—❧— **Exercice 5** ————— (4,5 points)

Partie I. (2 points)

(1) Calculer $I = \int_0^1 \ln(1 + t^2) dt$.

(0,75 pt)

(2) Montrer que $(\forall (x, y) \in [0; 1]^2); |\ln(1 + x^2) - \ln(1 + y^2)| \leq |x - y|$.

(0,75 pt)

(3) En déduire que $(\forall (x, y) \in [0; 1]^2); \ln(1 + x^2) \leq \ln(1 + y^2) + |x - y|$.

(0,5 pt)

Partie II. (2,5 points) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(1 + \frac{k^2}{n^2} \right) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k^2}{n^2} \right)$$

(1) Montrer que u_n est une somme de Riemann de la fonction $t \mapsto \ln(1 + t^2)$ sur $[0; 1]$, puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(1 pt)

(2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); |v_n - u_n| \leq \frac{\ln 2}{n}$, puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

(0,75 pt)

(3) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \frac{n^2 + k^2}{n^2}}$.

(0,75 pt)

—❧— **Exercice 6** ————— (2,5 points)

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = \int_x^{2x} \frac{\ln(1 + t^2)}{t} dt$.

(1) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); \ln 2 \cdot \ln(1 + x^2) \leq F(x) \leq \ln 2 \cdot \ln(1 + 4x^2)$.

(0,75 pt)

(2) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

(0,75 pt)

(3) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $F'(x) = \frac{\ln(1 + 4x^2) - \ln(1 + x^2)}{x}$, puis dresser le tableau de variations de F .

(1 pt)





Facultatifs, non comptés dans la note sur 20 — ils donnent droit à 6 points supplémentaires au maximum.

— Exercice bonus n° 1

(2 pt)

On considère trois urnes U , V et W . L'urne W contient 3 boules indiscernables au toucher : 1 boule noire et 2 boules blanches ; chacune des urnes U et V contient 4 boules indiscernables au toucher : 2 boules noires et 2 boules blanches. On tire au hasard une boule de l'urne W : si elle est blanche on la met dans l'urne U puis on tire simultanément deux boules de U ; si elle est noire on la met dans l'urne V puis on tire simultanément deux boules de V .

- (1) Quelle est la probabilité pour que le tirage des deux boules soit de l'urne U ? (0,5 pt)
- (2) Calculer la probabilité de tirer deux boules blanches à la fin de l'expérience. (0,75 pt)
- (3) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées à la fin de l'expérience. Déterminer la loi de probabilité de X . (0,75 pt)

— Exercice bonus n° 2

(2 pt)

Partie I. Soit a un élément de $\mathbb{Z}$.

- (1) Montrer que si a et 13 sont premiers entre eux alors $a^{2016} \equiv 1 [13]$. (0,5 pt)
- (2) On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E) \ x^{2015} \equiv 2 [13]$ et soit x une solution de (E) . Montrer que x et 13 sont premiers entre eux, puis que $x \equiv 7 [13]$. (0,75 pt)

Partie II. Une urne U contient cinquante boules numérotées de 1 à 50, indiscernables au toucher.

- (1) On tire au hasard une boule de l'urne. Quelle est la probabilité de tirer une boule portant un nombre solution de l'équation (E) ? (0,25 pt)
- (2) On tire au hasard une boule, on note son numéro et on la remet dans l'urne ; on répète cette expérience trois fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois une boule portant un nombre solution de (E) ? (0,5 pt)

— Exercice bonus n° 3

(2 pt)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n , indiscernables au toucher, où $n \geq 3$. On retire, sans remise, l'une après l'autre toutes les boules de cette urne.

- (1) Quelle est la probabilité pour que les boules 1, 2 et 3 sortent consécutivement et dans cet ordre ? (0,75 pt)
- (2) Calculer la probabilité que les boules 1, 2 et 3 sortent dans cet ordre, consécutivement ou non. (0,5 pt)
- (3) Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir les boules 1, 2 et 3. Déterminer la loi de probabilité de X_n . (0,75 pt)