
DEVOIR SURVEILLÉ N° 8 — MODÈLE 1

Probabilités — Arithmétique — Espaces vectoriels — Fonctions et suites d'intégrales

2^{ème} Bac Sciences Maths • Durée 4 heures • Barème sur 20 • Prof. Saad Choukri

❧ Exercice 1 _____ (4 points)

Une urne contient 4 boules blanches, 3 boules noires et 2 boules rouges, toutes indiscernables au toucher.

Partie I. On tire de cette urne, au hasard, successivement et sans remise, deux boules. On considère les événements

A : « la première boule tirée est rouge » B : « la deuxième boule tirée est blanche »

C : « obtenir au moins une boule blanche »

- (1) Montrer que $p(A \cap B) = \frac{1}{9}$. (0,5 pt)
- (2) Calculer $p(A)$ et $p(B)$. Les événements A et B sont-ils indépendants ? (0,75 pt)
- (3) Calculer $p(\overline{C})$, puis en déduire $p(C)$. (0,75 pt)
- (4) Sachant que la deuxième boule tirée est blanche, calculer la probabilité que la première soit rouge. (0,5 pt)

Partie II. On tire cette fois-ci au hasard et simultanément 3 boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de boules rouges restant dans l'urne.

- (1)
 - (a) Déterminer la loi de probabilité de X . (0,75 pt)
 - (b) Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$. (0,5 pt)
- (2) On répète l'épreuve « tirer simultanément 3 boules » cinq fois de suite, en remettant à la fin de chaque épreuve les trois boules tirées dans l'urne. Calculer la probabilité que l'événement $(X = 1)$ se réalise exactement 3 fois. (0,25 pt)

❧ Exercice 2 _____ (4 points)

On considère un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées $-1, -1, -1, 0, 1$ et 1 .

Partie I. On lance ce dé deux fois de suite et on note les deux nombres obtenus.

- (1) Calculer la probabilité de chacun des événements A : « obtenir deux nombres différents » et B : « obtenir deux nombres de somme nulle ». (1 pt)
- (2) Calculer la probabilité de l'événement C : « obtenir deux nombres différents sachant que leur somme est nulle ». (0,75 pt)
- (3) Soit X la variable aléatoire égale à la somme des deux nombres obtenus.
 - (a) Déterminer la loi de probabilité de X . (0,5 pt)
 - (b) Calculer $p(X > 0)$. (0,5 pt)

Partie II. On lance maintenant ce dé n fois de suite, où $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$, et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de lancers parmi les n où l'on obtient le nombre 1.

- (1) Calculer, en fonction de n , le nombre $p_n = p(Y = 2)$. (0,5 pt)

(2) Calculer, en fonction de n , le nombre $q_n = p(Y \geq 1)$, puis en déduire la limite de la suite $(q_n)_{n \geq 2}$. (0,5 pt)

(3) Déterminer le plus petit entier naturel $n \geq 2$ tel que $q_n \geq 0,99$. (0,25 pt)

✧ Exercice 3 _____ (3 points)

Soit a un entier naturel tel que $a \wedge 10 = 1$.

(1) Montrer que $a^4 \equiv 1 [5]$ et $a^4 \equiv 1 [2]$, puis en déduire que $a^4 \equiv 1 [10]$. (0,75 pt)

(2) En déduire que $(\forall k \in \mathbb{N}); a^{4k+1} \equiv a [10]$. (0,5 pt)

(3) Déterminer le chiffre des unités de chacun des nombres 7^{2015} , 3^{2016} et 123^{456} . (1 pt)

(4) Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation (E) $x^5 \equiv 3 [10]$. (0,75 pt)

✧ Exercice 4 _____ (3 points)

Dans l'espace vectoriel réel $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}_+^*$, on considère l'ensemble F des fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); x^2 f''(x) - 3x f'(x) + 4f(x) = 0$$

et on pose $\varphi_1(x) = x^2$ et $\varphi_2(x) = x^2 \ln x$ pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$.

(1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{E}, +, \cdot)$. (0,5 pt)

(2) Vérifier que φ_1 et φ_2 appartiennent à F . (0,75 pt)

(3) Montrer que la famille (φ_1, φ_2) est libre dans $(F, +, \cdot)$. (0,5 pt)

(4) Soit f une fonction de F et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = f(e^t)$. Montrer que g est solution de l'équation différentielle (G) $y'' - 4y' + 4y = 0$. (0,75 pt)

(5) Résoudre l'équation (G), puis en déduire que (φ_1, φ_2) est une base de $(F, +, \cdot)$. (0,5 pt)

✧ Exercice 5 _____ (6 points)

Partie I. (3 points) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-x)e^{2x}$, et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$. (0,5 pt)

(2) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = (1-2x)e^{2x}$, puis dresser le tableau de variations de f . (0,75 pt)

(3) Étudier la concavité de $(\mathcal{C}_f)$ et montrer qu'elle admet un unique point d'inflexion Ω ; écrire l'équation de la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ en Ω . (0,75 pt)

(4) Construire $(\mathcal{C}_f)$. (0,5 pt)

(5) Calculer l'aire du domaine délimité par $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. (0,5 pt)

Partie II. (3 points) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{2x} dx$.

(1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{e^2}{n+1}$, puis en déduire la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. (0,75 pt)

(2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 2u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$, puis en déduire la limite de la suite $(n u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. (1 pt)

(3) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose $v_n = \frac{2^n}{n!} u_n$. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$, puis que $v_n \leq \frac{2e^2}{n+1}$. (0,5 pt)

(4) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); v_{n+1} = v_n - \frac{2^n}{(n+1)!}$. (0,5 pt)

(5) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); v_n = \frac{1}{2} \left(e^2 - \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} \right)$, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!}$. (0,25 pt)



EXERCICES BONUS

Facultatifs, non comptés dans la note sur 20 — ils donnent droit à 6 points supplémentaires au maximum.

— **Exercice bonus n° 1** (2 pt)

Une urne contient n boules dont 3 sont blanches et les autres sont noires, où $n \geq 4$. On tire successivement et sans remise deux boules de cette urne. Sachant que la probabilité d'obtenir une boule blanche puis une boule noire est égale à $\frac{1}{4}$, quelles sont les valeurs possibles de n ?

— **Exercice bonus n° 2** (2 pt)

On dispose de 100 dés à six faces dont 20 sont truqués et donnent la face « 1 » avec la probabilité $\frac{1}{3}$, les 80 autres étant équilibrés. On choisit au hasard un dé parmi les 100, on le lance n fois et on obtient exactement $n - 1$ fois la face « 1 ». Avec quelle probabilité le dé choisi est-il truqué ?

— **Exercice bonus n° 3** (2 pt)

On lance 10 fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée, et on désigne par X la variable aléatoire égale à la fréquence d'apparition de la face « pile », c'est-à-dire le nombre d'apparitions de « pile » divisé par 10.

(1) Déterminer les valeurs prises par X , puis calculer $p \left(X = \frac{1}{2} \right)$. (1 pt)

(2) Calculer la probabilité de l'événement $\left(X \geq \frac{9}{10} \right)$. (1 pt)

