

DEVOIR SURVEILLÉ N° 7 — MODÈLE 4

Arithmétique — Nombres complexes — Structures algébriques — Fonctions et intégrales

2^{ème} Bac Sciences Maths • Durée 4 heures • Barème sur 20 • Prof. Saad Choukri

Exercice 1 (2,5 points)

Soient p et q deux nombres premiers distincts et soit $n = pq$.

- (1) Soit a un entier relatif tel que $a \wedge n = 1$. Montrer que $a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 [n]$. (1,25 pt)
- (2) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2^{2015} par 15. (0,75 pt)
- (3) Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation (E) $2^x \equiv 4 [15]$. (0,5 pt)

Exercice 2 (3,5 points)

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ d'affixes $a = 2 - i$, $b = 3 + i$ et $c = i e^{i\theta}$, où $\theta \in]-\pi; \pi]$.

- (1) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) décrit par le point C lorsque θ varie dans $]-\pi; \pi]$. (0,5 pt)
- (2) On pose $Z = \frac{c - a}{b - a}$.
 - (a) Interpréter géométriquement $|Z|$ et $\arg(Z)$. (0,5 pt)
 - (b) Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles A , B et C sont alignés. (0,75 pt)
 - (c) Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles le triangle ABC est rectangle en A . (0,75 pt)
- (3) Soit H l'orthocentre du triangle ABC dans le cas où $\theta = \frac{\pi}{2}$. Déterminer l'affixe du point H . (1 pt)

Exercice 3 (2,5 points)

Pour tout a de $\mathbb{R}$ on considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = ax$, et on pose $E = \{f_a / a \in \mathbb{R}\}$.

- (1) Montrer que E est une partie stable pour l'addition et pour la composition des applications. (0,5 pt)
- (2) Montrer que l'application $\phi : a \mapsto f_a$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(E, +)$ et de $(\mathbb{R}^*, \times)$ vers $(E^*, \circ)$, où $E^* = E \setminus \{f_0\}$. (1 pt)
- (3) Montrer que $\circ$ est distributive par rapport à $+$ dans E , puis en déduire la structure de $(E, +, \circ)$. (1 pt)

Exercice 4 (4 points)

Pour tout m de $\mathbb{R}$ on considère la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = e^{2x} - m e^x$, et on note (C_m) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- (1) Étudier les branches infinies de (C_m) au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$. (0,75 pt)
- (2) Montrer que pour tout m de $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f_m admet un extremum en un unique point I_m dont on précisera les coordonnées. (1 pt)
- (3) Montrer que lorsque m varie dans $\mathbb{R}_+^*$, le point I_m décrit la courbe (Γ) d'équation $y = -e^{2x}$. (0,75 pt)
- (4) Construire (Γ) , (C_1) et (C_2) dans le même repère. (0,75 pt)

- (5) Calculer l'aire du domaine délimité par (C_1) , (C_2) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 4$.
(0,75 pt)

— **Exercice 5** ————— (7,5 points)

Partie I. (3 points) Soit h la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par $h(x) = \frac{e^x}{x+1}$, et soit (C_h) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- (1) Calculer $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$, puis interpréter géométriquement le premier résultat.
(0,75 pt)

- (2) Montrer que $(\forall x \in] -1; +\infty[); h'(x) = \frac{x e^x}{(x+1)^2}$, puis dresser le tableau de variations de h .
(1 pt)

- (3) Étudier la branche infinie de (C_h) au voisinage de $+\infty$.
(0,5 pt)

- (4) Construire (C_h) .
(0,75 pt)

Partie II. (4,5 points) Soit F la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $F(x) = \int_0^{2 \ln x} \frac{e^t}{t+1} dt$.

- (1) Montrer que F est bien définie et dérivable sur $[1; +\infty[$, et que $F'(x) = \frac{2x}{1+2 \ln x}$.
(1 pt)

- (2) À l'aide du changement de variable $t = 2 \ln u$, montrer que $(\forall x \in [1; +\infty[); F(x) = \int_1^x \frac{2t}{1+2 \ln t} dt$.
(0,75 pt)

- (3) Montrer que $(\forall t \in \mathbb{R}); e^t \geq 1+t$, puis en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.
(0,75 pt)

- (4) Montrer que $(\forall x \geq 4); F(x) \geq \int_{\sqrt{x}}^x \frac{2t}{1+2 \ln t} dt$.
(0,5 pt)

- (5) En déduire que $(\forall x \geq 4); F(x) \geq \frac{x\sqrt{x}}{1+\ln x}$.
(0,75 pt)

- (6) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement le résultat.
(0,75 pt)



 EXERCICES BONUS

Facultatifs, non comptés dans la note sur 20 — ils donnent droit à 6 points supplémentaires au maximum.

— **Exercice bonus n° 1** ————— (2 pt)

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (P) $x^2 - 2y^2 = 1$.

- (1) Vérifier que $(3; 2)$ est une solution de (P).
(0,5 pt)
- (2) Montrer que si $(x; y)$ est une solution de (P), alors $(3x + 4y; 2x + 3y)$ en est aussi une.
(0,75 pt)
- (3) En déduire que (P) admet une infinité de solutions dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.
(0,75 pt)

— **Exercice bonus n° 2** ————— (2 pt)

- (1) Montrer que tout sous-groupe H de $(\mathbb{Z}, +)$ s'écrit sous la forme $H = n\mathbb{Z}$, où $n \in \mathbb{N}$.
(1 pt)



- (2) Soient a et b deux entiers de $\mathbb{Z}^*$. Montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$, puis en déduire que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = (a \wedge b)\mathbb{Z}$ et retrouver le théorème de Bézout. (1 pt)

— Exercice bonus n° 3 (2 pt)

Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n dt$.

- (1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); (2n + 1)I_n = 2n I_{n-1}$. (1 pt)

- (2) En déduire l'expression de I_n en fonction de n , puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$. (1 pt)