

DEVOIR SURVEILLÉ N° 7 — MODÈLE 3

Arithmétique — Groupes et anneaux — Équations différentielles — Fonctions et intégrales

2^{ème} Bac Sciences Maths • Durée 4 heures • Barème sur 20 • Prof. Saad Choukri

Exercice 1 (3 points)

(1) On admet que 331 est un nombre premier et on pose $a = \underbrace{99 \dots 9}_{330 \text{ fois}}$ écrit dans le système décimal.

Montrer que 331 divise a . (1,25 pt)

(2)

(a) Montrer que $3^{20} \equiv 1 \pmod{100}$. (0,75 pt)

(b) En déduire les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de 3^{2012} . (0,5 pt)

(c) Déterminer de même les deux derniers chiffres de 7^{2012} . (0,5 pt)

Exercice 2 (3,5 points)

On considère l'ensemble $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - 2y^2 \neq 0\}$ muni de la loi $*$ définie par

$$(a, b) * (x, y) = (ax + 2by ; ay + bx)$$

(1) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans G . (0,75 pt)

(2) Montrer que $(G, *)$ est un groupe commutatif. (1 pt)

(3) Soit $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - 2y^2 = 1\}$. Montrer que $(H, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$. (0,75 pt)

(4) Pour tout (x, y) de G on pose $M(x, y) = \begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$ et $\mathcal{M} = \{M(x, y) / (x, y) \in G\}$. Montrer que $h : (x, y) \mapsto M(x, y)$ est un isomorphisme de $(G, *)$ vers $(\mathcal{M}, \times)$. (1 pt)

Exercice 3 (2,5 points)

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; f''(x) - x f'(x) - f(x) = 0$$

On pose $g(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ et $h(x) = g(x) \int_0^x \frac{dt}{g(t)}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

(1) Montrer que g appartient à $\mathcal{E}$. (0,5 pt)

(2) Montrer que h appartient à $\mathcal{E}$. (0,75 pt)

(3) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. (0,5 pt)

(4) Montrer que la famille (g, h) est libre, puis que $\dim(\text{Vect}(g, h)) = 2$. (0,75 pt)

Exercice 4 (2,5 points)

Soit k un réel et soit $F = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x & ky \\ y & x \end{pmatrix} / (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

- (1) Montrer que $(F, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire. (1 pt)
- (2) On pose $I = M(1, 0)$ et $J = M(0, 1)$. Exprimer $M(x, y)$ en fonction de I et J , puis calculer J^n pour tout n de $\mathbb{N}^*$. (0,75 pt)
- (3) Montrer que $(F, +, \times)$ est un corps si et seulement si $k < 0$. (0,75 pt)

 Exercice 5 _____ (5,5 points)

Partie I. (3 points) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x - 1)e^{-2x}$, et soit (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- (1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis interpréter géométriquement le second résultat. (0,5 pt)
- (2) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = (5 - 6x)e^{-2x}$, puis dresser le tableau de variations de f . (0,75 pt)
- (3) Étudier le signe de f sur $\mathbb{R}$. (0,5 pt)
- (4) Construire (C_f) . (0,75 pt)
- (5) Calculer l'aire du domaine délimité par (C_f) , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = \frac{1}{3}$ et $x = 1$. (0,5 pt)

Partie II. (2,5 points) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose $f_n(x) = (3x - 1)e^{-2nx}$ et $u_n = \int_0^1 f_n(t) dt$.

- (1) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n = \frac{-1 - 2e^{-2n}}{2n} + \frac{3(1 - e^{-2n})}{4n^2}$. (1 pt)
- (2) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. (0,75 pt)
- (3) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n$. (0,75 pt)

 Exercice 6 _____ (3 points)

Soit F la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

- (1) Montrer que F est bien définie et dérivable sur $]1; +\infty[$, et que $(\forall x \in]1; +\infty[); F'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$. (0,75 pt)
- (2) Montrer que $(\forall x \in]1; +\infty[); \frac{x^2 - x}{2 \ln x} \leq F(x) \leq \frac{x^2 - x}{\ln x}$. (0,75 pt)
- (3) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$, puis montrer que F admet une limite finie L à droite en 1 vérifiant $\frac{1}{2} \leq L \leq 1$. (0,75 pt)
- (4) Dresser le tableau de variations de F sur $]1; +\infty[$. (0,75 pt)



EXERCICES BONUS



Facultatifs, non comptés dans la note sur 20 — ils donnent droit à 6 points supplémentaires au maximum.

Exercice bonus n° 1 _____ (2 pt)

Soit n un entier de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.



(1) Montrer que si $2^n - 1$ est premier alors n est premier. (1 pt)

(2) Montrer que si $2^n + 1$ est premier alors n est une puissance de 2. (1 pt)

— Exercice bonus n° 2 (2 pt)

Soit $(G, *)$ un groupe fini d'élément neutre e et de cardinal pair. Montrer qu'il existe un élément x de G distinct de e tel que $x * x = e$.

— Exercice bonus n° 3 (2 pt)

Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$.

(1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n + u_{n+2} = \frac{1}{n+1}$. (0,75 pt)

(2) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. (0,75 pt)

(3) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n$. (0,5 pt)