

DEVOIR SURVEILLÉ N° 7 — MODÈLE 2

Arithmétique — Structures algébriques — Étude de fonctions — Suites d'intégrales

2^{ème} Bac Sciences Maths • Durée 4 heures • Barème sur 20 • Prof. Saad Choukri

❧ Exercice 1 _____ (3 points)

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(\mathcal{E}) \ 324x - 245y = 7$.

(1)

(a) À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de $(\mathcal{E})$. (0,75 pt)

(b) En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$. (0,5 pt)

(2) Soit (x, y) une solution de $(\mathcal{E})$. Montrer que $x \equiv 0 [7]$. (0,75 pt)

(3) Soit $d = x \wedge y$, où (x, y) est une solution de $(\mathcal{E})$.

(a) Montrer que les valeurs possibles de d sont 1 et 7. (0,5 pt)

(b) Déterminer les solutions (x, y) de $(\mathcal{E})$ vérifiant $x \wedge y = 1$. (0,5 pt)

❧ Exercice 2 _____ (2 points)

(1) Déterminer, suivant les valeurs de n dans $\mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de 2^n par 9. (1 pt)

(2) Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $(E) \ 2^x \equiv 5 [9]$. (1 pt)

❧ Exercice 3 _____ (3 points)

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(F) \ 7x - 5y = 18$.

(1) Résoudre l'équation (F) dans $\mathbb{Z}^2$. (0,75 pt)

(2) Montrer que $(\forall k \in \mathbb{Z}); (7k + 2) \wedge (5k + 4) = (k + 8) \wedge 18$. (1 pt)

(3) En déduire les solutions (x, y) de (F) vérifiant $x \wedge y = 1$. (0,75 pt)

(4) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ chacune des équations $(\mathcal{E}_1) \ x^2 \equiv 4 [5]$ et $(\mathcal{E}_2) \ x^2 \equiv 2 [7]$. (0,5 pt)

❧ Exercice 4 _____ (3,5 points)

On définit sur $\mathbb{R}^2$ la loi de composition interne $*$ par

$$(\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2) (\forall (c; d) \in \mathbb{R}^2); (a; b) * (c; d) = \left(\frac{1}{3}(ad + bc); \frac{1}{3}bd - \frac{3}{4}ac \right)$$

et on considère l'application f définie de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{R}^2$ par $f(z) = f(a + ib) = (2b; 3a)$.

(1) Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}, *)$. (1,25 pt)

(2) En déduire la structure de $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}, *)$. (0,5 pt)

(3) Déterminer le symétrique de tout élément $(a; b)$ de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}$ pour la loi $*$. (0,75 pt)

(4) Résoudre dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}$ l'équation (H) $(a; b) * (a; b) * (a; b) = (0; 3)$. (1 pt)

Exercice 5 (6,5 points)

Partie I. (4 points) Pour tout n de $\mathbb{N}$ on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}}$, et on note (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 4 cm.

- (1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$, puis donner leur interprétation géométrique. (On distinguera les cas $n = 0$, $n = 1$ et $n \geq 2$.) (1 pt)
- (2) Étudier les variations de f_n et dresser son tableau de variations dans chacun de ces cas. (1 pt)
- (3) Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par un même point Ω que l'on déterminera. (0,5 pt)
- (4) Montrer que (C_0) admet un unique point d'inflexion, qu'elle est symétrique par rapport à Ω , puis écrire l'équation de la tangente à (C_0) en Ω . (0,75 pt)
- (5) Construire (C_0) , puis en déduire (C_1) sachant que $f_1(x) = f_0(-x)$. (0,75 pt)

Partie II. (2,5 points) Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $u_n = \int_0^1 f_n(t) dt$.

- (1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$ et que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante ; en déduire qu'elle est convergente. (0,75 pt)
- (2) Sans calculer d'intégrale, montrer que $u_0 + u_1 = 1$, puis calculer u_0 et u_1 . (0,75 pt)
- (3) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n + u_{n+1} = \frac{1 - e^{-n}}{n}$, puis calculer u_2 . (0,5 pt)
- (4) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 \leq u_n \leq \frac{1 - e^{-n}}{n}$, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. (0,5 pt)

Exercice 6 (2 points)

Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

- (1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$. (0,75 pt)
- (2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. (0,5 pt)
- (3) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2 + (-1)^{n-1} I_n$, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. (0,75 pt)



EXERCICES BONUS

Facultatifs, non comptés dans la note sur 20 — ils donnent droit à 6 points supplémentaires au maximum.

— **Exercice bonus n° 1** (2 pt)

Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, n ne divise pas $2^n - 1$.

— **Exercice bonus n° 2** (2 pt)

Soit $(A, +, \times)$ un anneau tel que $(\forall x \in A); x^2 = x$.



(1) Montrer que $(\forall x \in A); x + x = 0$.

(1 pt)

(2) En déduire que l'anneau $(A, +, \times)$ est commutatif.

(1 pt)

— **Exercice bonus n° 3**

(2 pt)

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)$, puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$.