

DEVOIR SURVEILLÉ N° 7 — MODÈLE 1

Arithmétique — Structures algébriques — Nombres complexes — Étude de fonctions et suites

2^{ème} Bac Sciences Maths • Durée 4 heures • Barème sur 20 • Prof. Saad Choukri

❧ Exercice 1 _____ (2,5 points)

- (1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) $7x - 3y = 1$. (0,75 pt)
- (2) Soient a et b deux entiers de $\mathbb{N}^*$ tels que $7a - 3b = 29$, et soit $d = a \wedge b$. Montrer que d divise 29, puis en déduire que $d \in \{1; 29\}$. (0,75 pt)
- (3) On suppose de plus que $a \vee b = 1044$. Déterminer a et b . (1 pt)

❧ Exercice 2 _____ (3,5 points)

On pose $G =]-1; 1[$ et pour tout (x, y) de $G \times G$ on pose $x * y = \frac{x + y}{1 + xy}$.

- (1) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans G . (0,75 pt)
- (2) Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$. Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(G, *)$, puis en déduire la structure de $(G, *)$. (1,25 pt)
- (3) Pour x dans $\mathbb{R}_+^*$ on pose $H_x = \left\{ \frac{x^n - 1}{x^n + 1} / n \in \mathbb{Z} \right\}$. Montrer que $H_x \subset G$ et que $(H_x, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$. (1,5 pt)

❧ Exercice 3 _____ (2,5 points)

On considère dans $\text{IM}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble

$$E = \left\{ M(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} / x \in G \right\}, \quad \text{où } G =]-1; 1[$$

- (1) Montrer que E est une partie stable de $(\text{IM}_2(\mathbb{R}), \times)$. (1 pt)
- (2) Montrer que l'application $F : x \mapsto M(x)$ est un isomorphisme de $(G, *)$ vers $(E, \times)$, où $*$ est la loi de l'exercice précédent. (0,75 pt)
- (3) En déduire la structure de $(E, \times)$, puis déterminer l'inverse de la matrice $M(x)$ pour tout x de G . (0,75 pt)

❧ Exercice 4 _____ (3,5 points)

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère l'application φ définie de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ par

$$(\forall z \in \mathbb{C}); \varphi(z) = \frac{1}{3}(z + 2\bar{z} + 3i)$$

et pour tout point $M(z)$ de (P) on note M' le point d'affixe $\varphi(z)$.

- (1) Déterminer et construire l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ invariants par φ . (0,75 pt)
- (2) Déterminer l'ensemble (D) des points $M(z)$ pour lesquels $\varphi(z)$ est un imaginaire pur. (0,75 pt)
- (3) Montrer que $(\forall z \in \mathbb{C}); \varphi(z) - z = \frac{i}{3}(3 - 4\text{Im}(z))$, puis en déduire que si $M \notin (\Delta)$ alors la droite (MM') est parallèle à l'axe (Oy) . (1 pt)

- (4) En déduire que φ est l'affinité d'axe (Δ) , de direction (Oy) et de rapport $\frac{-1}{3}$, puis donner une méthode de construction du point M' à partir de M . (1 pt)

Exercice 5 (8 points)

Partie I. (3,5 points) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln(1 + x^2)$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- (1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (0,5 pt)
- (2) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}$, puis dresser le tableau de variations de f . (0,75 pt)
- (3) Étudier les branches infinies de (C_f) . (0,5 pt)
- (4) Construire (C_f) . (0,75 pt)
- (5) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, puis en déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$ il existe un unique α_n de $\mathbb{R}$ tel que $f(\alpha_n) = n$. (0,5 pt)
- (6) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et déterminer sa limite. (0,5 pt)

Partie II. (2 points) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

- (1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \in [0; 1]$. (0,5 pt)
- (2) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, puis qu'elle converge et calculer sa limite. (0,5 pt)
- (3) Montrer que $(\forall x \in [0; 1]); x - x^2 \leq f(x) \leq x$, puis en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n - u_n^2 \leq u_{n+1} \leq u_n$. (0,5 pt)
- (4) Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k^2$. Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. (0,5 pt)

Partie III. (2,5 points) Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1 + x^2) dx$.

- (1) Calculer I_0 . (0,5 pt)
- (2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq I_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$, puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$. (0,5 pt)
- (3) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2} dx$. (0,75 pt)
- (4) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2} dx \leq \frac{1}{n+3}$, puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n$. (0,75 pt)



EXERCICES BONUS

Facultatifs, non comptés dans la note sur 20 — ils donnent droit à 6 points supplémentaires au maximum.

Exercice bonus n° 1 (2 pt)

Soit n un entier de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

- (1) Montrer que l'équation $x^n + x - 1 = 0$ admet une unique solution x_n dans $]0; 1[$. (1 pt)
- (2) Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est croissante, puis calculer sa limite. (1 pt)



— Exercice bonus n° 2

(2 pt)

Soit $(G, *)$ un groupe d'élément neutre e tel que $(\forall x \in G); x * x = e$. Montrer que $(G, *)$ est commutatif.

— Exercice bonus n° 3

(2 pt)

On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx$.

(1) Montrer que $I = J$ et que $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right) dx$.

(1 pt)

(2) En déduire que $I = \frac{-\pi}{2} \ln 2$.

(1 pt)