

DEVOIR SURVEILLÉ N° 6 — MODÈLE 4

Nombres complexes — Transformations du plan — Suites et calcul intégral

2^{ème} Bac Sciences Maths • Durée 4 heures • Barème sur 20 • Prof. Saad Choukri

❧ Exercice 1 (3,5 points)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (H) $(1 - iz)^5 = (1 + iz)^5$.

- (1) Montrer que toutes les solutions de (H) sont des nombres réels. (0,75 pt)
- (2) On pose $z = \tan \theta$, où $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Montrer que (H) équivaut à l'équation $(\mathcal{E}_1)$ $e^{10i\theta} = 1$, puis en déduire l'ensemble des solutions de (H). (1,25 pt)
- (3) Montrer que (H) équivaut à l'équation $(\mathcal{E}_2)$ $z(z^4 - 10z^2 + 5) = 0$. (0,75 pt)
- (4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $z^4 - 10z^2 + 5 = 0$, puis en déduire la valeur de $\tan^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$. (0,75 pt)

❧ Exercice 2 (4 points)

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Pour tout z de $\mathbb{C}$ on pose $f(z) = z^2 - 2jz - 1$, où $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- (1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (G) $f(z) = 0$. (0,75 pt)
- (2) Déterminer, puis construire dans (P), l'ensemble (H) des points M d'affixe z pour lesquels $f(z)$ est un nombre réel. (1 pt)
- (3) Soit F l'application qui, à tout point M de (P) d'affixe z , associe le point M' d'affixe $f(z)$, et soit A le point d'affixe j .
 - (a) Montrer que $(\forall z \in \mathbb{C}); f(z) - f(j) = (z - j)^2$. (0,75 pt)
 - (b) Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre A et de rayon $r > 0$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'image de $(\mathcal{C})$ par F . (0,75 pt)
 - (c) Soit $(\mathcal{D})$ la droite passant par A et de coefficient directeur $\tan \theta$, où $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Déterminer l'image de $(\mathcal{D})$ par F . (0,75 pt)

❧ Exercice 3 (4 points)

On considère un triangle ABC et on construit à l'extérieur de celui-ci les triangles équilatéraux ABD , BCE et CAF , de centres respectifs C' , A' et B' . On suppose que $(\vec{AB}, \vec{AD}) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$. Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ dans lequel les affixes de B et C sont respectivement $b = -1$ et $c = 1$, et a désigne l'affixe de A .

- (1) Donner l'écriture complexe de chacune des rotations R_1 de centre A transformant B en D , R_2 de centre B transformant C en E , et R_3 de centre A transformant C en F . (1 pt)
- (2) En déduire les affixes d , e et f des points D , E et F . (0,75 pt)
- (3) Calculer les affixes a' , b' et c' des points A' , B' et C' . (1 pt)
- (4) Calculer en fonction de a les affixes des vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'C'}$. (0,75 pt)
- (5) En déduire que le triangle $A'B'C'$ est équilatéral. (0,5 pt)

❧ Exercice 4 (4,5 points)

Soit a un réel de $\mathbb{R}_+^*$ et soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \cdots + \frac{a^n}{n!}$$

(1) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $e^a = 1 + a + \int_0^a (a-t)e^t dt$. (0,5 pt)

(2) Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $K_n = \frac{1}{n!} \int_0^a (a-t)^n e^t dt$. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); K_{n+1} = K_n - \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$. (0,75 pt)

(3) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); e^a = u_n + K_n$. (0,75 pt)

(4) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq K_n \leq \frac{a^n}{n!} (e^a - 1)$. (0,75 pt)

(5) Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $v_n = \frac{a^n}{n!}$.

(a) Montrer qu'il existe n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que $(\forall n \in \mathbb{N}); n \geq n_0 \implies v_{n+1} \leq \frac{1}{2}v_n$. (0,5 pt)

(b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}); n \geq n_0 \implies 0 \leq v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} v_{n_0}$. (0,5 pt)

(c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. (0,75 pt)

❧ Exercice 5 (4 points)

Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $u_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx$, et pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose $v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

(1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n}$, puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. (0,75 pt)

(2) Calculer $I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx$, puis en déduire la valeur de u_1 . (0,75 pt)

(3) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $[0; 1]$ on pose $S_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} x^{n-1}$.

(a) Montrer que $S_n(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{1+x}$. (0,5 pt)

(b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); |v_n - \ln 2| \leq \frac{1}{n+1}$, puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$. (0,75 pt)

(4) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n = \ln 2$. (1,25 pt)



❧ EXERCICES BONUS ❧

Facultatifs, non comptés dans la note sur 20 — ils donnent droit à 6 points supplémentaires au maximum.

— Exercice bonus n° 1 (2 pt)

Calculer chacune des intégrales suivantes.



(1) $I = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} \, dx.$ (1 pt)

(2) $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 + \sin x}.$ (1 pt)

— **Exercice bonus n° 2** (2 pt)

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$.

(1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) $(z+1)^n = (z-1)^n.$ (1 pt)

(2) En déduire que $\sum_{k=1}^{n-1} \cot\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 0.$ (1 pt)

— **Exercice bonus n° 3** (2 pt)

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$, et soient $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour k dans $\{0; 1; \dots; n-1\}.$

(1) Montrer que $(\forall z \in \mathbb{C}); z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (z - \omega_k),$ puis en déduire que $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega_k) = n.$ (1 pt)

(2) En déduire que $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$ (1 pt)