
DEVOIR SURVEILLÉ N° 6 — MODÈLE 3
Arithmétique — Structures algébriques — Suites et calcul intégral

2^{ème} Bac Sciences Maths • Durée 4 heures • Barème sur 20 • Prof. Saad Choukri

❧ **Exercice 1** _____ (3,5 points)

Pour tout n de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ on pose $A_n = (n!)^2 + 1$.

Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}); A_n \equiv 1 [2]$. (0,25 pt)

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, A_n admet un diviseur premier p_n tel que $p_n > n$. (0,75 pt)

On suppose que $p_n \equiv 3 [4]$ et on pose $p_n = 4k + 3$, où $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $p_n \mid (n!)^{p_n} + n!$ et que $A_n \mid 1 + (n!)^{2(2k+1)}$. (0,75 pt)

En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}); p_n \equiv 1 [4]$. (0,75 pt)

Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers positifs s'écrivant sous la forme $4k + 1$, où $k \in \mathbb{N}^*$. (1 pt)

❧ **Exercice 2** _____ (4,5 points)

Partie I.

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) $148x - 97y = 1$.

En utilisant l'algorithme d'Euclide, montrer que $(-19; -29)$ est une solution particulière de (E). (0,5 pt)

Résoudre l'équation (E) en détaillant les étapes de la résolution. (0,5 pt)

Résoudre dans $\mathbb{Z}/148\mathbb{Z}$ l'équation (F) $\overline{97} \times u = \overline{1}$. (0,5 pt)

On considère dans $\mathbb{Z}$ le système (S)
$$\begin{cases} n \equiv 2 [4] \\ n \equiv 6 [37] \\ n \equiv 7 [97] \end{cases}$$

Montrer que $(\forall n \in \mathbb{Z}); (n \equiv 2 [4] \text{ et } n \equiv 6 [37]) \iff n \equiv 6 [148]$. (0,5 pt)

En déduire l'ensemble des solutions du système (S). (On pourra utiliser la question 1.(b).) (1 pt)

Partie II. Pour tout élément n de $A = \{2; 3; 4; \dots; 148\}$ on pose $S(n) = \sum_{k=0}^{147} n^k$.

Vérifier que 149 est un nombre premier. (0,5 pt)

Montrer que $(\forall n \in A); n^{148} \equiv 1 [149]$. (0,25 pt)

En déduire que 149 divise $S(n)$ pour tout n de A . (0,25 pt)

En utilisant le théorème de Bézout, montrer que $(\forall n \in A); n^{148} \wedge (n - 1) = 1$. (0,25 pt)

Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E_n) \quad n^{148}x + (1 - n)y = n$ en détaillant les étapes. (0,25 pt)

✂ Exercice 3 (3,75 points)

Dans $IM_2(\mathbb{R})$ on considère l'ensemble

$$G = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ kb & a \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}, \quad \text{où } k \in \mathbb{R}$$

Montrer que G est une partie stable de $(IM_2(\mathbb{R}), \times)$. (0,5 pt)

On suppose que $k < 0$ et on pose $\omega = i\sqrt{-k}$.

Montrer que $(\forall z \in \mathbb{C}) (\exists! (a, b) \in \mathbb{R}^2); z = a + \omega b$. (0,5 pt)

Soit h l'application définie de $\mathbb{C}$ vers G par $h(z) = h(a + \omega b) = M(a, b)$. Montrer que h est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(G^*, \times)$. (0,75 pt)

En déduire la structure de $(G^*, \times)$, puis déterminer l'inverse de toute matrice $M(a, b)$ de G^* . (0,75 pt)

Pour $A = M\left(1; \frac{1}{\sqrt{-k}}\right)$, calculer A^n pour tout n de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. (0,75 pt)

On suppose que $k \geq 0$. Calculer $M(\sqrt{k}, 1) \times M(-\sqrt{k}, 1)$. L'ensemble G^* est-il une partie stable de $(IM_2(\mathbb{R}), \times)$? (0,5 pt)

✂ Exercice 4 (4,25 points)

Dans l'intervalle $G = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ on définit la loi de composition interne $*$ par

$$(\forall (x, y) \in G \times G); x * y = \text{Arctan}(-1 + \tan x + \tan y)$$

Montrer que $(G, *)$ est un groupe commutatif. (1,25 pt)

Pour tout x de G on pose $f(x) = -1 + \tan x$.

Montrer que f est une bijection de G vers $\mathbb{R}$ et déterminer sa bijection réciproque f^{-1} . (0,75 pt)

Montrer que f^{-1} est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(G, *)$, puis retrouver la structure de $(G, *)$. (1 pt)

Pour tout x de G et tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose $x^{(n)} = \underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ fois}}$.

Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); x^{(n)} = \text{Arctan}(1 - n + n \tan x)$. (0,5 pt)

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation (E) $x^{(n)} = -x^3$ admet une unique solution α_n dans G , et que $0 \leq \alpha_n < \frac{\pi}{4}$. (0,75 pt)

✂ Exercice 5 (4 points)

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \int_1^2 \left(1 - e^{-\frac{1}{nx}}\right) dx$ et $v_n = n \times u_n$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - (1 + x)$.

Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) \geq 0$. (0,5 pt)

En déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); e^{-x} \leq \frac{1}{1+x}$. (0,25 pt)

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); 1 - \frac{1}{nx} \leq e^{-\frac{1}{nx}} \leq 1 - \frac{1}{1+nx}$. (0,75 pt)

Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \frac{1}{n} \times \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n}$. (0,5 pt)

En déduire les limites des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. (0,5 pt)

Soit F_n la fonction définie par $F_n(x) = \int_n^{nx} \left(1 - e^{-\frac{1}{t}}\right) dt$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Vérifier que $D_{F_n} =]0; +\infty[$. (0,25 pt)

Montrer que F_n est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que $(\forall x \in]0; +\infty[); F'_n(x) = n \left(1 - e^{-\frac{1}{nx}}\right)$. (0,5 pt)

En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n = \frac{1}{n} \int_n^{2n} \left(1 - e^{-\frac{1}{t}}\right) dt$. (0,5 pt)

Que représentent les termes des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$? (0,25 pt)



EXERCICES BONUS

Facultatifs, non comptés dans la note sur 20 — ils donnent droit à 6 points supplémentaires au maximum.

— Exercice bonus n° 1 (2 pt)

Par combien de zéros se termine l'écriture du nombre $N = 100!$ dans le système décimal ? (1 pt)

Soit p un entier de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ tel que $(p-1)! \equiv -1 [p]$. Montrer que p est un nombre premier. (1 pt)

— Exercice bonus n° 2 (2 pt)

On définit sur $\mathbb{R}$ la loi de composition interne $*$ par $(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2); a * b = a + b + \sin(\pi ab)$.

Montrer que $*$ est commutative dans $\mathbb{R}$. (0,25 pt)

Montrer que $*$ admet un élément neutre dans $\mathbb{R}$ que l'on déterminera. (0,5 pt)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 + \sin(\pi x)$.

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\left] \frac{-1}{2}; 0 \right]$. (0,75 pt)

Calculer $f(-1)$. La loi $*$ est-elle associative dans $\mathbb{R}$? Justifier la réponse. (0,5 pt)

— Exercice bonus n° 3 (2 pt)

Soit (a, b) un couple de $(\mathbb{N}^* \setminus \{1\})^2$ tel que $(\forall n \in \mathbb{N}); (a^n + n) / (b^n + n)$. On suppose que $a \neq b$ et on considère un nombre premier positif p tel que $(a - b) \wedge p = 1$.

Vérifier que $m = a(p-1) + p$ est une solution dans $\mathbb{N}^*$ du système (S) $\begin{cases} x \equiv -a [p] \\ x \equiv 1 [p-1] \end{cases}$ (0,5 pt)

En déduire que l'ensemble des solutions de (S) dans $\mathbb{Z}$ est $S = \{m + kp(p-1) / k \in \mathbb{Z}\}$. (0,25 pt)

Montrer que $a \wedge p = 1$. (0,25 pt)

En utilisant le théorème de Fermat, montrer que $a^m + m \equiv 0 [p]$. (0,5 pt)

Montrer que $b^m + m \equiv b - a [p]$. (0,25 pt)

Qu'en déduit-on ? Justifier la réponse. (0,25 pt)