

DEVOIR SURVEILLÉ N° 6 — MODÈLE 2

Arithmétique — Nombres complexes — Structures algébriques — Calcul intégral

2^{ème} Bac Sciences Maths • Durée 4 heures • Barème sur 20 • Prof. Saad Choukri

❧ Exercice 1 _____ (3 points)

Partie I. On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E) \ 2x^4 + x - 1 \equiv 0 [10]$.

(1) Soit x une solution de (E) .

(a) Montrer que $x \wedge 10 = 1$. (On pourra utiliser le théorème de Bézout.) (0,5 pt)

(b) En déduire que $x \equiv -1 [10]$. (On pourra utiliser le théorème de Fermat.) (0,75 pt)

(2) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) en justifiant la réponse. (0,5 pt)

Partie II. On considère dans $\mathbb{R}^+$ l'équation $(F) \ 2x^4 + x - 1 = 0$.

(1) Montrer que (F) admet une unique solution λ dans $\mathbb{R}^+$ et que $\lambda \in]0; 1[$. (0,5 pt)

(2) Montrer que λ est irrationnel. (Raisonnement par l'absurde et théorème de Gauss.) (0,75 pt)

❧ Exercice 2 _____ (3,75 points)

Partie I. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) \ z^2 - 2mz + m^2 + 4 = 0$, où $m \in \mathbb{C}^*$.

(1) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$. (0,5 pt)

(2) On suppose que $m = 2e^{i\theta}$, où $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$. Écrire les solutions de (E) sous forme trigonométrique. (0,75 pt)

(3) Dans le plan complexe (P) on considère les points $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ avec $z_1 = m + 2i$ et $z_2 = m - 2i$.

(a) Déterminer les ensembles $(E_1) = \{M(m) \in (P) / OM_1 = OM_2\}$ et $(E_2) = \{M(m) \in (P) / \overrightarrow{OM_1} \perp \overrightarrow{OM_2}\}$. (0,75 pt)

(b) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles le triangle OM_1M_2 est rectangle et isocèle en O . (0,5 pt)

Partie II. Soit S la symétrie centrale de centre $I(1)$ et soit R la rotation de centre $\Omega(1+i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Pour tout point $M(z)$ de (P) distinct de O on pose $M' = S(M)$ et $M'' = R(M)$.

(1) Montrer que $z' = -z + 2$ et $z'' = iz + 2$. (0,5 pt)

(2) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ de (P) pour lesquels $A(2)$, Ω , M' et M'' sont cocycliques. (0,75 pt)

❧ Exercice 3 _____ (3,5 points)

Pour tout (a, b) de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ on pose $a * b = e^{(1+\ln a)(1+\ln b)-1}$.

(1) Montrer que $*$ est commutative et associative dans $\mathbb{R}_+^*$. (0,5 pt)

(2) Montrer que $*$ admet un élément neutre dans $\mathbb{R}_+^*$, puis déterminer les éléments symétrisables de $(\mathbb{R}_+^*, *)$. (0,5 pt)

(3)

(a) Montrer que $I = \left] \frac{1}{e}; +\infty \right[$ est une partie stable de $(\mathbb{R}_+^*, *)$. (0,25 pt)

(b) Montrer que l'application $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow I$ définie par $f(x) = e^{\left(\frac{1}{x}-1\right)}$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ vers $(I, *)$, déterminer f^{-1} , puis en déduire la structure de $(I, *)$. (0,75 pt)

(4) Pour x dans I et n dans $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ on pose $f_n(x) = \underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ fois}}$.

(a) Montrer que $f_n(x) = e^{(1+\ln x)^n - 1}$. (0,5 pt)

(b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ il existe un unique u_n de I tel que $f_n(u_n) = e^n$. (0,5 pt)

(c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$. (0,5 pt)

✦ Exercice 4 (3,25 points)

On considère dans $\text{IM}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble

$$E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a + 2b \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

(1) Montrer que $(E, +)$ est un sous-groupe de $(\text{IM}_2(\mathbb{R}), +)$. (0,25 pt)

(2)

(a) Montrer que E est une partie stable de $(\text{IM}_2(\mathbb{R}), \times)$. (0,5 pt)

(b) Montrer que l'application f qui, à tout nombre complexe $z = a + ib$, associe la matrice $M(a - b, b)$, est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(E^*, \times)$. (0,75 pt)

(c) En déduire la structure de $(E^*, \times)$, où $E^* = E \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, et déterminer l'inverse de toute matrice $M(a, b)$ de E^* . (0,75 pt)

(3) Montrer que $(E, +, \times)$ est un corps commutatif. (0,25 pt)

(4) On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Résoudre dans E l'équation $(F) J \times X^3 = I$. (Remarquer que $-2 + 2i = (1 + i)^3$.) (0,75 pt)

✦ Exercice 5 (1,5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(0) = 0$ et $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{-1}{x}}$.

(1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$. (0,5 pt)

(2) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $F(0) = \frac{1}{e}$ et $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; F(x) = \int_x^1 f(t) dt$. Montrer que F est continue à droite en 0. (0,5 pt)

(3) Calculer la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $S_n = n \times \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} e^{\frac{-n}{k}}$. (0,5 pt)

✦ Exercice 6 (5 points)

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$F(0) = 0 \quad \text{et} \quad (\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t} e^{\frac{-1}{t}} dt$$

(1)

(a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; \ln(2) e^{\frac{-1}{x}} \leq F(x) \leq \ln(2) e^{\frac{-1}{2x}}$. (0,5 pt)

(b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$, puis donner une interprétation géométrique du résultat. (0,5 pt)

(2)

(a) Montrer que F est continue à droite en 0. (0,25 pt)

(b) Étudier la dérivabilité de F à droite en 0, puis interpréter géométriquement le résultat. (0,5 pt)

(3)

(a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); F'(x) = \frac{1}{x} e^{\frac{-1}{2x}} (1 - e^{\frac{-1}{2x}})$. (0,75 pt)

(b) En déduire la monotonie de F sur $\mathbb{R}^+$ et dresser son tableau de variations. (0,5 pt)

(4)

(a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ il existe un unique a_n de $\mathbb{R}_+^*$ tel que $F(a_n) = \frac{n}{n+1} \ln(2)$. (0,5 pt)

(b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \leq e^{\frac{-1}{an}} \leq \frac{n}{n+1}$, puis en déduire la limite de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. (0,5 pt)

(c) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \ln(n+1) \leq S_n \leq 2 \ln(n+1)$. (0,5 pt)

(d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n^k}$, où $k \in \mathbb{N}^*$. (0,5 pt)



EXERCICES BONUS

Facultatifs, non comptés dans la note sur 20 — ils donnent droit à 6 points supplémentaires au maximum.

— Exercice bonus n° 1 (2 pt)

Soit p un nombre premier tel que $p \geq 5$.

(1) Montrer que $p^2 - 1$ est divisible par 24. (1 pt)

(2) On pose $N = \sum_{k=1}^{p-1} k^{p-1}$. Montrer que $N \equiv -1 [p]$, puis en déduire que N n'est pas divisible par p . (1 pt)

— Exercice bonus n° 2 (2 pt)

On considère l'ensemble $G = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

(1) Montrer que G est une partie stable de $(\text{IM}_2(\mathbb{R}), +)$ et de $(\text{IM}_2(\mathbb{R}), \times)$. (0,5 pt)

(2) Montrer que l'application f définie par $f(z) = f(a + ib) = M(a, b)$ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}, +)$ vers $(G, +)$ et de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(G^*, \times)$, puis en déduire la structure de $(G, +)$ et celle de $(G^*, \times)$. (0,75 pt)

(3) Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calculer A^n pour tout n de $\mathbb{N}^*$. (0,5 pt)

(4) Montrer que $H = \left\{ M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} / \theta \in \mathbb{R} \right\}$ est un sous-groupe de $(G^*, \times)$. (0,25 pt)

— Exercice bonus n° 3 (2 pt)

On note $E(x)$ la partie entière du réel x .

(1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); E(\sqrt[3]{7n+2}) = E(\sqrt[3]{7n+3})$. (1 pt)

(2) Montrer que $(\forall (a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*); a \wedge b = a + b - ab + 2 \times \sum_{k=0}^{b-1} E\left(k \frac{a}{b}\right)$. (1 pt)