

DEVOIR SURVEILLÉ N° 6 — MODÈLE 1

Structures algébriques — Nombres complexes — Arithmétique — Calcul intégral

2^{ème} Bac Sciences Maths • Durée 4 heures • Barème sur 20 • Prof. Saad Choukri

❧ Exercice 1 (3,5 points)

On considère l'ensemble $G = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$.

(1) Montrer que $(\forall (z, z') \in G \times G); 1 + zz' \neq 0$. (0,25 pt)

(2) Pour tout (z, z') de $G \times G$ on pose $z * z' = \frac{z + z'}{1 + zz'}$.

(a) Montrer que $(\forall (z, z') \in G \times G); |1 + zz'|^2 - |z + z'|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |z'|^2)$. (0,5 pt)

(b) En déduire que $*$ est une loi de composition interne dans G . (0,25 pt)

(c) Montrer que $(G, *)$ est un groupe non commutatif. (1,5 pt)

(3) Pour θ dans $\mathbb{R}$ on pose $H_\theta = \{a e^{i\theta} / a \in]-1; 1[\}$. Montrer que H_θ est une partie stable de $(G, *)$ et que $(H_\theta, *)$ est un groupe commutatif. (1 pt)

❧ Exercice 2 (3 points)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_m) \quad z^2 - 2mz - 2(1 + i) = 0$, où $m \in \mathbb{C}$. Dans le plan complexe (P) rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$ on considère les points $M(m)$, $N(2m)$, $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$, où z_1 et z_2 sont les solutions de (E_m) .

(1)

(a) Résoudre (E_m) dans $\mathbb{C}$ pour $m = i\sqrt{2}$. (0,5 pt)

(b) Montrer que dans ce cas le triangle OM_1M_2 est rectangle en O . (0,25 pt)

(2) On pose $\Delta' = \frac{1}{4}\Delta$, où Δ est le discriminant de (E_m) , et soit (H) l'ensemble des points $M(m)$ pour lesquels le triangle OM_1M_2 est rectangle en O .

(a) Montrer que OM_1M_2 est rectangle en O si et seulement si $|m|^2 = |\Delta'|$. (0,75 pt)

(b) En déduire que $x^2 - y^2 + 2xy + 2 = 0$ est une équation cartésienne de (H). (0,5 pt)

(3) On suppose que $M(m) \in (H)$.

(a) Montrer que le quadrilatère OM_1NM_2 est un rectangle. (0,5 pt)

(b) Donner une méthode géométrique de construction des points M_1 et M_2 connaissant le point $M(m)$. (0,5 pt)

❧ Exercice 3 (3 points)

(1) Soit (a, b) un couple de $(\mathbb{N}^*)^2$ tel que $a + b = 23$.

(a) Montrer que a et b sont premiers entre eux. (0,5 pt)

(b) En déduire a et b sachant que $a < b$ et $a \vee b = 126$. (0,75 pt)

(2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(\mathcal{E}) \quad 9x - 14y = 1$. (0,75 pt)

(3) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système (S) $\begin{cases} x \equiv 4 [9] \\ x \equiv 5 [14] \end{cases}$ (0,75 pt)

- (4) Soit x une solution de (S) dans $\mathbb{Z}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de x par 126. (0,25 pt)

✎ Exercice 4 (3 points)

Soit a un entier de $\mathbb{N}^*$ tel que $4a^2 + 1$ ne soit pas premier, et soit $p \geq 2$ un diviseur premier de $4a^2 + 1$.

- (1)
- (a) Vérifier que $p \geq 3$. (0,25 pt)
 - (b) Montrer que $(2a)^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} [p]$. (0,5 pt)
 - (c) Montrer que $(2a) \wedge p = 1$, puis en déduire que $(2a)^{p-1} \equiv 1 [p]$. (0,5 pt)
 - (d) En utilisant ce qui précède, montrer que $p \equiv 1 [4]$. (0,5 pt)
- (2) Montrer que si d est un diviseur positif de $4a^2 + 1$ alors $d \equiv 1 [4]$. (0,75 pt)
- (3) En déduire qu'il existe (m, n) dans $(\mathbb{N}^*)^2$ tel que $4a^2 + 1 = (4m + 1)(4n + 1)$. (0,5 pt)

✎ Exercice 5 (3,5 points)

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (31)^k$.

- (1)
- (a) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 30 \times S_n = 31^n - 1$. (0,25 pt)
 - (b) En utilisant le théorème de Bézout, montrer que $31 \wedge S_{2014} = 1$. (0,5 pt)
 - (c) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{Z}); 31x \equiv 1 [S_{2014}] \iff x \equiv 31^{2013} [S_{2014}]$. (0,75 pt)
- (2)
- (a) Soit $p \geq 7$ un nombre premier. Montrer que $S_p \equiv 1 [p]$. (1 pt)
 - (b) On admet que 2011 est un nombre premier. Déterminer le reste de la division euclidienne de S_{2012} par 2011. (1 pt)

✎ Exercice 6 (4 points)

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(0) = \ln 3 \quad \text{et} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^*); F(x) = \int_x^{3x} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

- (1)
- (a) Montrer que $(\forall x \in]0; +\infty[); e^{-3x} \ln 3 \leq F(x) \leq e^{-x} \ln 3$. (0,25 pt)
 - (b) Montrer que $(\forall x \in]-\infty; 0[); e^{-x} \ln 3 \leq F(x) \leq e^{-3x} \ln 3$. (0,25 pt)
- (2)
- (a) Montrer que F est continue en 0. (0,5 pt)
 - (b) Étudier les branches infinies de la courbe (C_F) au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$. (0,5 pt)
- (3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = -1$ et $(\forall x \in \mathbb{R}^*); f(x) = \frac{e^{-x} - 1}{x}$.
- (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. (0,25 pt)
 - (b) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*); \frac{F(x) - \ln 3}{x} = \frac{1}{x} \int_x^{3x} f(t) dt$. (0,5 pt)
 - (c) En déduire que F est dérivable en 0 en précisant $F'(0)$. (0,5 pt)

(4)

(a) Montrer que F est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$, et que $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; F'(x) = \frac{e^{-2x} - 1}{x e^x}$. (0,75 pt)

(b) En déduire la monotonie de F sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations. (0,5 pt)



FIN DU SUJET



EXERCICES BONUS



Facultatifs, non comptés dans la note sur 20 — ils donnent droit à 6 points supplémentaires au maximum.

— **Exercice bonus n° 1** (2 pt)

Soient $(H, *)$ et $(K, *)$ deux sous-groupes d'un groupe $(G, *)$. Montrer que $(H \cup K, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$ si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

— **Exercice bonus n° 2** (2 pt)

On définit sur $\mathbb{R}$ la loi de composition interne $\perp$ par

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) ; x \perp y = kxy + k'(x + y), \quad \text{où } (k, k') \in (\mathbb{R}^*)^2$$

(1) Déterminer les couples (k, k') pour lesquels la loi $\perp$ est associative dans $\mathbb{R}$. (1 pt)

(2) Quelle est alors la structure de $(\mathbb{R}, \perp)$? Justifier la réponse. (1 pt)

— **Exercice bonus n° 3** (2 pt)

Pour tout x de $\mathbb{R}$ on pose $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, et dans $\text{IM}_2(\mathbb{R})$ on considère

$$E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} \text{ch}(x) & \text{sh}(x) \\ \text{sh}(x) & \text{ch}(x) \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$$

(1) Montrer que E est une partie stable de $(\text{IM}_2(\mathbb{R}), \times)$ et que $(E, \times)$ est un groupe commutatif. (1 pt)

(2) Soit $H = \left\{ N(y) = \frac{1}{2y} \begin{pmatrix} 1 + y^2 & 1 - y^2 \\ 1 - y^2 & 1 + y^2 \end{pmatrix} / y \in \mathbb{R}_+^* \right\}$. Montrer que $H \subset E$ et que $(H, \times)$ est un sous-groupe de $(E, \times)$. (1 pt)