

DEVOIR SURVEILLÉ N° 5 — MODÈLE 4

Synthèse — Arithmétique — Nombres complexes — Intégrales — Équations différentielles

2^{ème} Bac Sciences Maths • Durée 4 heures • Barème sur 20 • Prof. Saad Choukri

Exercice 1 (2 points)

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose $u_n = (1006)^n + (1007)^n$.

(1)

- (a) Déterminer, suivant les valeurs de n dans $\mathbb{N}^*$, le reste de la division euclidienne de 2^n par 5. (0,5 pt)
- (b) En déduire le reste de la division euclidienne de u_{2013} par 5. (0,25 pt)

(2)

- (a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n \equiv 1 + (-1)^n [3]$. (0,5 pt)
 - (b) En déduire que u_{u_n} est divisible par 3 pour tout n de $\mathbb{N}^*$. (0,25 pt)
- (3) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_{2n+1} \equiv 0 [2013]$. (0,5 pt)

Exercice 2 (4 points)

(1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) $z^2 - iz(1 - \cos \theta e^{i\theta}) + \cos \theta e^{i\theta} = 0$, où $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$. (0,5 pt)

(2) Dans le plan complexe ($\mathcal{P}$) rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ on considère les points $A(i)$, $B\left(\frac{i}{4}\right)$, $M\left(\frac{1}{i + \tan \theta}\right)$ et le point N milieu du segment $[AM]$.

- (a) Montrer que $z_N = \frac{1}{4} [\sin(2\theta) + 2i \sin^2 \theta]$. (0,75 pt)
- (b) Montrer que lorsque θ varie dans $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, le point N décrit le cercle (Γ) de centre $B\left(\frac{i}{4}\right)$ et de rayon $R = \frac{1}{4}$, privé d'un point que l'on précisera. (1 pt)
- (c) En déduire le lieu géométrique du point M lorsque θ varie dans $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$. (0,5 pt)
- (d) Écrire z_M sous forme exponentielle. (0,5 pt)
- (e) Donner une méthode géométrique, à la règle et au compas, permettant de construire le point $M_0\left(\frac{1}{i + \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}\right)$. (0,75 pt)

Exercice 3 (3,25 points)

Dans le plan complexe ($\mathcal{P}$) rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère pour tout n de $\mathbb{N}^*$ la rotation R_n de centre $B(1)$ et d'angle $\frac{\pi}{2^n}$.

- (1) Donner l'écriture complexe de la rotation R_n . (0,25 pt)
- (2) Pour tout point M de ($\mathcal{P}$) on pose $M_n = R_n(M)$.
 - (a) Montrer que $(R_{n+1})^{-1}(M_n) = R_{n+1}(M)$. (0,5 pt)
 - (b) En déduire que $M_n M_{n+1} = M M_{n+1}$. (0,25 pt)

(3) Montrer que pour tout point M de $(\mathcal{P})$ distinct de B ,

$$M_n M_{n+1} = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \times BM \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{M_n M_{n+1}}) \equiv \frac{3\pi}{2^{n+2}} - \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

(1 pt)

(4) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^n OO_{k+1}$.

(a) Montrer que $(\forall x \in [0; \frac{\pi}{3}]); \frac{x}{2} \leq \sin x \leq x$. (0,5 pt)

(b) Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et que sa limite L vérifie $\frac{\pi}{4} \leq L \leq \frac{\pi}{2}$. (0,75 pt)

✂ Exercice 4 _____ (5 points)

Partie I. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(t) = e^{2t} - 2e^t$.

(1) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^+$. (0,5 pt)

(2)

(a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que $(\forall t > 0); 0 < \frac{f(t) + 1}{t} < f'(t)$. (0,5 pt)

(b) En déduire que $(\forall t > 0); t f'(t) - f(t) > 1$. (0,25 pt)

(c) Montrer que la fonction $g : t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. (0,5 pt)

Partie II. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$F(0) = -\ln 2 \quad \text{et} \quad (\forall x \in \mathbb{R}_+^*); F(x) = \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t} dt$$

(1)

(a) Montrer que $(\forall x > 0); 0 \leq F(x) + \ln 2 \leq f(2x) - f(x)$. (0,5 pt)

(b) Étudier la continuité et la dérivabilité de F à droite en 0. (0,75 pt)

(2)

(a) Montrer que $(\forall x > 0); F(x) \geq f(x) \times \int_x^{2x} \frac{dt}{t}$. (0,25 pt)

(b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$, puis donner leur interprétation géométrique. (0,75 pt)

(3)

(a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); F'(x) = \frac{f(2x) - f(x)}{x}$. (0,5 pt)

(b) En déduire la monotonie de F et dresser son tableau de variations. (0,25 pt)

(4) Construire la courbe $(\mathcal{C}_F)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (0,25 pt)

✂ Exercice 5 _____ (2 points)

On considère les deux entiers $a = \sum_{k=0}^9 (2011)^k$ et $N = \sum_{k=0}^{2009} (2011)^k$.

(1)

(a) Montrer que $a \equiv 60 [100]$. (0,75 pt)

(b) En déduire que a^p est divisible par 100 pour tout p de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. (0,25 pt)

(2)

(a) Montrer que $N \equiv 201a \pmod{100}$. (0,75 pt)

(b) En déduire les chiffres des unités et des dizaines de l'entier N . (0,25 pt)

— ❧ **Exercice 6** ————— (3,75 points)

Partie I. On considère l'équation différentielle (E) $1 + y' = 3e^{-y}$ et on cherche les fonctions numériques h positives et dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions de (E). Pour tout x de $\mathbb{R}$ on pose $g(x) = e^{h(x)} - 1$.

(1) Montrer que g est positive sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle (F) $y' = -y + 2$. (0,5 pt)

(2) Résoudre (F), puis donner l'expression de $g(x)$ et celle de $h(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$. (0,75 pt)

Partie II. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(3 + e^{-x})$.

(1) Vérifier que f est solution de l'équation (E). (0,25 pt)

(2) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+); |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$. (0,5 pt)

(3) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, puis que α appartient à $\mathbb{R}^+$. (0,75 pt)

Partie III. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

(1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$. (0,5 pt)

(2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$, puis en déduire la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. (0,5 pt)



FIN DU SUJET



EXERCICES BONUS



Facultatifs, non comptés dans la note sur 20 — ils donnent droit à 3 points supplémentaires au maximum.

— **Exercice bonus n° 1** ————— (1 pt)

Soient n un entier de $\mathbb{N}^*$ et θ un réel de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) $(1+z)^n = e^{2in\theta}$, puis en déduire les solutions de (E') $(1+z)^n = (1-z)^n$.

— **Exercice bonus n° 2** ————— (1 pt)

Soit θ un réel de $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\cot\left(\frac{\theta}{2^n}\right) - \cot\theta = \frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} + \cdots + \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}}$$

— **Exercice bonus n° 3** ————— (1 pt)

Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_0^1 t^n e^{-t} dt$.

(1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}$. (0,5 pt)

(2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n$. (0,5 pt)

