
DEVOIR SURVEILLÉ N° 5 — MODÈLE 3
Équations différentielles — Nombres complexes — Suites d'intégrales

2^{ème} Bac Sciences Maths • Durée 4 heures • Barème sur 20 • Prof. Saad Choukri

—❧— **Exercice 1** _____ (2 points)

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions f trois fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant

$$(\forall x \in \mathbb{R}); f'''(x) - 2f''(x) + f'(x) = 0$$

- (1) En posant $g = f'$, montrer que $f \in \mathcal{E}$ équivaut à $g'' - 2g' + g = 0$. (0,75 pt)
- (2) En déduire que $\mathcal{E}$ est l'ensemble des fonctions $x \mapsto (\lambda x + \mu)e^x + \delta$, où $(\lambda, \mu, \delta) \in \mathbb{R}^3$. (0,75 pt)
- (3) Montrer qu'il existe une unique fonction h de $\mathcal{E}$ vérifiant $h(0) = h'(0) = 0$ et $h''(0) = 1$, puis déterminer h . (0,5 pt)

—❧— **Exercice 2** _____ (3 points)

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions f trois fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant

$$(\forall x \in \mathbb{R}); f'''(x) - 2f''(x) - f'(x) + 2f(x) = 0$$

- (1) Soit f un élément de $\mathcal{F}$ et posons $y = f' - 2f$.
- (a) Montrer que y est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}) \ y'' - y = 0$. (0,75 pt)
- (b) Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E})$. (0,75 pt)
- (2) En déduire que $\mathcal{F}$ est l'ensemble des fonctions $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x} + \delta e^{2x}$, où $(\lambda, \mu, \delta) \in \mathbb{R}^3$. (1 pt)
- (3) Montrer qu'il existe une unique fonction h de $\mathcal{F}$ vérifiant $h(0) = h'(0) = 0$ et $h''(0) = 1$. (0,5 pt)

—❧— **Exercice 3** _____ (3 points)

Soit θ un réel de $\mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

- (1) Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $z(\theta) = \frac{e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}}$. (1 pt)
- (2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) \ z^5 = (1 - z)^5$. (On utilisera le résultat de la question 1.) (2 pt)

—❧— **Exercice 4** _____ (4 points)

Le plan complexe $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère l'application φ qui, à tout point $M(z)$ de $(\mathcal{P})$ tel que $z \neq 0$, associe le point $M'(z')$ avec

$$z' = f(z) = \frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right)$$

- (1) Montrer que φ est surjective. (0,75 pt)
- (2) L'application φ est-elle injective ? Justifier la réponse. (0,75 pt)
- (3) Déterminer l'image du cercle trigonométrique $(\mathcal{C})$ par φ . (1 pt)
- (4) Déterminer l'image de l'axe imaginaire (Oy) privé de O par φ . (0,75 pt)
- (5) Montrer que φ admet exactement deux points invariants A et B dont on précisera les affixes. (0,75 pt)

—❧ Exercice 5 — (4 points)

Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_0^{\ln x} \frac{e^t}{(1+t)^2} dt$.

(1) Montrer que $D_F = \left] \frac{1}{e}; +\infty \right[$ en justifiant la réponse. (0,25 pt)

(2) Montrer que $\left(\forall x \in \left] \frac{1}{e}; 1 \right] \right); F(x) \leq x \left(1 - \frac{1}{1 + \ln x} \right)$, puis en déduire $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{e}\right)^+} F(x)$. (0,5 pt)

(3)

(a) Montrer que $\left(\forall x \in \left] \frac{1}{e}; +\infty \right[\right); F(x) = \frac{x}{(1 + \ln x)^2} - 1 + 2 \int_0^{\ln x} \frac{e^t}{(1+t)^3} dt$. (0,75 pt)

(b) En déduire que $(\forall x \in [1; +\infty[); F(x) \geq \frac{x}{(1 + \ln x)^2} - 1$, puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. (0,5 pt)

(4)

(a) Montrer que F réalise une bijection de $I = \left] \frac{1}{e}; +\infty \right[$ vers $\mathbb{R}$. (0,75 pt)

(b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) (\exists! \alpha_n \in I); F(\alpha_n) = -n$. (0,5 pt)

(c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite. (0,75 pt)

—❧ Exercice 6 — (4 points)

Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$.

(1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$. (1 pt)

(2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); (n+1) I_{n+1} I_n = \frac{\pi}{2}$. (1 pt)

(3) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, puis que $(\forall n \in \mathbb{N}); \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$. (0,75 pt)

(4) En déduire que la suite $(\sqrt{n} I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite. (1,25 pt)



—❧ EXERCICES BONUS —❧

Facultatifs, non comptés dans la note sur 20 — ils donnent droit à 3 points supplémentaires au maximum.

— Exercice bonus n° 1 (1 pt)

Soit p un nombre premier et soit a un entier relatif non divisible par p . Montrer que $(\forall k \in \mathbb{N}); a^{(p-1)p^k} \equiv 1 [p^{k+1}]$.

— Exercice bonus n° 2 (1 pt)

Soit (a, b) un couple de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $a \wedge b = 1$. Montrer que

$$\sqrt{\frac{a}{b}} \in \mathbb{Q} \iff (\exists (\alpha, \beta) \in (\mathbb{N}^*)^2); a = \alpha^2 \text{ et } b = \beta^2$$



— Exercice bonus n° 3

(1 pt)

Soit (a, b) un couple de $(\mathbb{Z}^*)^2$ tel que $a \wedge b = 1$ et soit d un élément de $\mathbb{N}^*$. Montrer que

$$d \mid ab \iff (\exists! (d_1, d_2) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*); d_1 \mid a, d_2 \mid b \text{ et } d = d_1 d_2$$