

DEVOIR SURVEILLÉ N° 5 — MODÈLE 2
Arithmétique — Congruences — Théorème de Fermat — Calcul intégral

2^{ème} Bac Sciences Maths • Durée 4 heures • Barème sur 20 • Prof. Saad Choukri

❧ **Exercice 1** _____ (2 points)

Soit a un entier de $\mathbb{N}^*$ tel que $a \wedge 10 = 1$.

(1)

(a) Montrer que $a^4 \equiv 1 [10]$. (0,5 pt)

(b) En déduire que $a^{40} \equiv 1 [100]$. (0,5 pt)

(2) Déterminer les chiffres des unités et des dizaines de chacun des nombres $N_1 = 3^{2013}$ et $N_2 = 67^{42}$. (1 pt)

❧ **Exercice 2** _____ (3 points)

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) $13x - 19y = 11$.

(1)

(a) Sans résoudre (E), vérifier que son ensemble de solutions n'est pas vide. (0,25 pt)

(b) À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de (E) en détaillant les étapes, puis en déduire l'ensemble des solutions de (E). (0,75 pt)

(2) Soit (x, y) une solution de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

(a) Déterminer les valeurs possibles de $d = x \wedge y$ en justifiant la réponse. (0,25 pt)

(b) Déterminer les solutions (x, y) de (E) vérifiant $x \wedge y = 1$. (0,5 pt)

(3)

(a) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (F) $(n + 1)^{13} \equiv -6 [13]$. (On pourra utiliser le théorème de Fermat.) (0,5 pt)

(b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système (S) $\begin{cases} (n + 1)^{13} \equiv -6 [13] \\ (n + 1)^{19} \equiv 5 [19] \end{cases}$ (0,75 pt)

❧ **Exercice 3** _____ (3,5 points)

Soit a un entier de $\mathbb{N}^*$ et soit p un nombre premier tel que $p \geq 5$ et $p \nmid a^2 + a + 1$.

(1)

(a) Montrer que $a^3 \equiv 1 [p]$. (0,25 pt)

(b) Montrer que $(a - 1) \wedge p = 1$ et $(a + 1) \wedge p = 1$. (0,5 pt)

(c) En déduire le plus petit entier naturel non nul k vérifiant $a^k \equiv 1 [p]$. (0,75 pt)

(d) Montrer que $p \equiv 1 [3]$. (On pourra appliquer le théorème de Fermat.) (0,75 pt)

(2) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose $A_n = (3(n!))^2 + 3(n!) + 1$.

(a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, A_n admet un diviseur premier p_n tel que $p_n > n$ et $p_n \equiv 1 [3]$. (0,75 pt)

(b) En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers positifs s'écrivant sous la forme $3k + 1$, où $k \in \mathbb{N}^*$. (0,5 pt)

✂ **Exercice 4** (3,5 points)

Partie I. Soit (a, b) un couple de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $a \wedge b = 1$ et $ab = c^3$, où $c \in \mathbb{N}^*$.

(1) Montrer qu'il existe (α, β) dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $a = \alpha^3$ et $b = \beta^3$. (0,75 pt)

(2) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+1} \notin \mathbb{Q}$. (Raisonnement par l'absurde.) (0,75 pt)

Partie II. Soit (a, b) un couple de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $a^3 = 1 + 3b^3$.

(1) Montrer que $a \wedge b = 1$. (0,25 pt)

(2)

(a) Montrer que $a \equiv 1 [3]$ et que $(a - 1) \wedge (a^2 + a + 1) = 3$. (0,75 pt)

(b) En déduire que $a - 1$ ou $a^2 + a + 1$ est divisible par 3 et non par 9. (0,5 pt)

(3) On suppose que $a - 1$ est divisible par 3 et non par 9. Montrer que $\left(\frac{a-1}{3}\right) \wedge (a^2 + a + 1) = 1$,

puis en déduire que $\sqrt[3]{\frac{a-1}{3}}$ et $\sqrt[3]{a^2 + a + 1}$ sont deux entiers naturels divisant b . (0,5 pt)

✂ **Exercice 5** (8 points)

Partie I. (5 points) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(1) = 1 \quad \text{et} \quad (\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[); f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$$

(1)

(a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. (0,5 pt)

(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis donner une interprétation géométrique de chacune. (0,75 pt)

(2) Soit t un élément de l'intervalle $] -1; +\infty[$.

(a) Montrer que $\left| \int_0^t \frac{u^2}{1+u} du \right| \leq t^2 |\ln(1+t)|$. (0,5 pt)

(b) Montrer que $\int_0^t \frac{u^2}{1+u} du = \ln(1+t) - t + \frac{1}{2}t^2$. (0,5 pt)

(c) En déduire que f est dérivable en $x_0 = 1$ et que $f'(1) = \frac{-1}{2}$. (0,5 pt)

(3)

(a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}); f'(x) = \frac{\frac{x-1}{x} - \ln x}{(x-1)^2}$. (0,5 pt)

(b) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}); \ln x > \frac{x-1}{x}$, puis dresser le tableau de variations de f . (0,75 pt)

(4) Construire $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ en précisant la tangente (T) au point d'abscisse $x_0 = 1$. (0,5 pt)

(5) Montrer que $(\forall t \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}); f\left(\frac{1}{t}\right) = t f(t)$. (0,5 pt)

Partie II. (3 points) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$F(0) = 0 \quad \text{et} \quad (\forall x \in \mathbb{R}_+^*); F(x) = \int_x^{x^2} f(t) dt$$

(1)

(a) Montrer que $(\forall x \in]0; +\infty[); \frac{2x}{x+1} \ln x \leq F(x) \leq x \ln x$. (0,5 pt)

(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement chacune. (0,75 pt)

(2)

(a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. (0,25 pt)

(b) Montrer que $(\forall u \in]0; 1[); F\left(\frac{1}{u}\right) = - \int_u^{u^2} \frac{f(t)}{t} dt$. (Changement de variable.) (0,5 pt)

(c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$. (On pourra poser $u = \frac{1}{x}$ et utiliser le théorème de la moyenne.) (0,5 pt)

(3) On pose $G(x) = \int_1^x f(t) dt$ pour x dans $\mathbb{R}_+^*$. Exprimer $F(x)$ à l'aide de $G(x)$ et $G(x^2)$, puis en déduire les variations de F sur chacun des intervalles $\left]0; \frac{1}{3}\right]$ et $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right[$. (0,5 pt)



EXERCICES BONUS



Facultatifs, non comptés dans la note sur 20 — ils donnent droit à 3 points supplémentaires au maximum.

— **Exercice bonus n° 1** (1 pt)

Déterminer, dans le système décimal, le chiffre des unités du nombre $N = 4444^{4444}$.

— **Exercice bonus n° 2** (1 pt)

Résoudre dans $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^2$, puis dans $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^2$, le système (S) $\begin{cases} \bar{7}x + \bar{5}y = \bar{2} \\ \bar{5}x + \bar{4}y = \bar{7} \end{cases}$

— **Exercice bonus n° 3** (1 pt)

On pose $N = \underbrace{11111111}_{9 \text{ fois}}$ écrit en base 10. Montrer que $N^2 = 12345678987654321$.

