

DEVOIR SURVEILLÉ N° 5 — MODÈLE 1

Nombres complexes — Transformations du plan — Calcul intégral

2^{ème} Bac Sciences Maths • Durée 4 heures • Barème sur 20 • Prof. Saad Choukri

❧ Exercice 1 (3 points)

On considère le nombre complexe $u = e^{i\frac{\pi}{2013}}$ et on pose $S = 1 + u^2 + u^4 + \dots + u^{2012}$.

- (1) Montrer que $S = \frac{1}{1-u}$. (0,75 pt)
- (2) Écrire S sous forme algébrique. (1 pt)
- (3) En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{2013}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{2013}\right) + \dots + \cos\left(\frac{2012\pi}{2013}\right) = \frac{-1}{2}$. (0,5 pt)
- (4) En déduire de même la valeur exacte de $\sum_{k=1}^{1006} \sin\left(\frac{2k\pi}{2013}\right)$. (0,75 pt)

❧ Exercice 2 (3,5 points)

Dans le plan complexe $(\mathcal{P})$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 1, b = j$ et $c = j^2$, où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

- (1) Montrer que le triangle ABC est équilatéral. (0,5 pt)
- (2) Soit $M(z)$ un point du plan complexe. On considère les rotations R_1 et R_2 de même centre $M(z)$ et d'angles respectifs $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$. On pose $A_1 = R_1(A)$ et $B_2 = R_2(B)$.
 - (a) Exprimer les affixes a_1 et b_2 des points A_1 et B_2 en fonction de z . (0,5 pt)
 - (b) Déterminer l'ensemble (Γ) des points $M(z)$ pour lesquels M, A_1 et B_2 sont alignés. (0,75 pt)
- (3) On suppose dans la suite que $M(z) \notin (\Gamma)$.
 - (a) Montrer que $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_2} = \overrightarrow{MC}$, puis en déduire la nature du quadrilatère MA_1CB_2 . (0,5 pt)
 - (b) Déterminer l'ensemble (Γ') des points $M(z)$ pour lesquels MA_1CB_2 est un rectangle. (0,75 pt)
 - (c) Le quadrilatère MA_1CB_2 peut-il être un carré ? Justifier la réponse. (0,5 pt)

❧ Exercice 3 (4,5 points)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) \quad z^3 - 4iz^2 - (4+i)z - 3 + 3i = 0$.

- (1) Montrer que (E) admet une solution réelle que l'on déterminera. (0,5 pt)
- (2) Déterminer les solutions z_0, z_1 et z_2 de (E) telles que $|z_0| < |z_1| < |z_2|$. (0,75 pt)
- (3) Dans le plan complexe on considère les points $A(z_0), B(z_1)$ et $C(z_2)$.
 - (a) Placer A, B et C , puis montrer que O, A, B et C sont cocycliques. (1,25 pt)
 - (b) On pose $Z = \frac{z - z_2}{z - z_1}$, où $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\}$. Déterminer et construire l'ensemble des points $M(z)$ dans chacun des cas suivants. (2 pt)

$$(\mathcal{E}_1) \quad Z \in i\mathbb{R} \quad (\mathcal{E}_2) \quad \arg Z \equiv \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) [\pi] \quad (\mathcal{E}_3) \quad \arg Z \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \quad (\mathcal{E}_4) \quad |Z| = 2$$

✦ Exercice 4 _____ (4 points)

Soient $(u_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 2}$ les suites définies pour tout $n \geq 2$ par

$$u_n = \int_0^1 \sqrt[n]{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad v_n = n(u_n - 1)$$

(1) Calculer l'intégrale $J = \int_0^1 \ln(1+t^2) dt$. (On pourra intégrer par parties.) (0,75 pt)

(2) Montrer que $(\forall n \geq 2); 1 \leq u_n \leq \sqrt[n]{2}$, puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. (0,75 pt)

(3)

(a) Montrer que $(\forall u \geq 0); u \leq e^u - 1 \leq u e^u$. (0,5 pt)

(b) En déduire que $(\forall x \geq 0); 0 \leq e^x - (x+1) \leq \frac{1}{2}x^2 e^x$. (0,5 pt)

(4)

(a) Montrer que pour tout $n \geq 2$ et tout t de $[0; 1]$,

$$0 \leq \sqrt[n]{1+t^2} - \left(1 + \frac{1}{n} \ln(1+t^2)\right) \leq \frac{\sqrt[n]{2}}{2n^2} (\ln 2)^2$$

(1 pt)

(b) En déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est convergente et calculer sa limite. (0,5 pt)

✦ Exercice 5 _____ (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(0) = \ln 2 \quad \text{et} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^*); f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t^2}}{t} dt$$

(1) Vérifier que f est paire. (0,5 pt)

(2)

(a) Montrer que $(\forall x \in]0; +\infty[); e^{-4x^2} \ln 2 \leq f(x) \leq e^{-x^2} \ln 2$. (1 pt)

(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis donner une interprétation géométrique du résultat. (0,5 pt)

(c) Étudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0. (1 pt)

(3)

(a) Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que $(\forall x \in]0; +\infty[); f'(x) = \frac{e^{-4x^2} - e^{-x^2}}{x}$. (0,75 pt)

(b) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. (0,5 pt)

(4) Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, l'unité étant 2 cm. (0,75 pt)





EXERCICES BONUS



Facultatifs, non comptés dans la note sur 20 — ils donnent droit à 3 points supplémentaires au maximum.

— Exercice bonus n° 1

(1 pt)

Montrer que pour tout a de $\mathbb{C} \setminus [-1; 1]$ il existe un unique nombre complexe b tel que $a = \frac{1}{2} \left(b + \frac{1}{b} \right)$ et $|b| > 1$.

— Exercice bonus n° 2

(1 pt)

Soient u et v deux nombres complexes. Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ l'équation (E) $|u + iv|^2 = u^2 + v^2$.

— Exercice bonus n° 3

(1 pt)

Soient n un entier de $\mathbb{N}^*$ et θ un réel. Montrer que

$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin \left(\theta + \frac{k\pi}{n} \right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sin(n\theta)$$

