

DEVOIR SURVEILLÉ N° 4 — MODÈLE 4

Synthèse — Nombres complexes — Équations différentielles — Calcul intégral

2^{ème} Bac Sciences Maths • Durée 4 heures • Barème sur 20 • Prof. Saad Choukri

Le plan complexe ($\mathcal{P}$) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Exercice 1 (3,5 points)

Partie A. Soit $a \in \mathbb{C}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) $z^2 - 2z + 1 + a^2 = 0$. (0,75 pt)

Partie B. Pour $a \in \mathbb{C}$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + ia$ et $z_B = 1 - ia$.

(1) Déterminer l'ensemble (D) des points $M(a)$ pour lesquels O, A et B sont alignés. (0,75 pt)

(2) Déterminer l'ensemble (C) des points $M(a)$ pour lesquels le triangle OAB est rectangle en O. (0,75 pt)

(3) On suppose dans la suite que $a = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

(a) Montrer que $(\forall \alpha \in \mathbb{R}); 1 + e^{i\alpha} = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$ et $1 - e^{i\alpha} = -2i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$, puis en déduire les formes exponentielles de z_A et z_B . (0,75 pt)

(b) Déterminer θ pour que le triangle OAB soit rectangle et isocèle en O. (0,5 pt)

Exercice 2 (3 points)

On considère les équations différentielles (E_0) $y' - 2y = 0$ et (E) $y' - 2y = e^{2x}$.

(1) Déterminer le réel λ pour que la fonction $g : x \mapsto \lambda x e^{2x}$ soit solution de (E). (0,75 pt)

(2) Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E_0) . (0,75 pt)

(3) Résoudre (E_0) , puis en déduire l'ensemble des solutions de (E). (0,75 pt)

(4) Déterminer la solution de (E) vérifiant $f(0) = 1$. (0,75 pt)

Exercice 3 (3,5 points)

Calculer les intégrales suivantes.

(1) $A = \int_0^1 x \operatorname{Arctan} x \, dx$ (0,75 pt)

(2) $B = \int_1^e \ln x \, dx$ (0,75 pt)

(3) $C = \int_0^1 x^2 e^x \, dx$ (0,75 pt)

(4) $D = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} \, dx$ (0,75 pt)

(5) $E = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1 + e^x} \, dx$ (0,5 pt)

Exercice 4 (4,5 points)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$.

(1) Montrer que $(\forall t \in \mathbb{R}); \frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^{2k} + \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}$. (0,75 pt)

(2) En déduire que $\operatorname{Arctan} x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt.$ (1 pt)

(3) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 \leq \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt \leq \frac{1}{2n+1}.$ (0,75 pt)

(4) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$ (1 pt)

(5) En prenant $x = \frac{1}{\sqrt{3}},$ calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)3^k}.$ (1 pt)

—❧ Exercice 5 ————— (2,5 points)

Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $u_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx.$

(1) Calculer u_0 et $u_1.$ (0,75 pt)

(2) En utilisant une intégration par parties, montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n = \frac{2n}{2n+1} u_{n-1}.$ (1 pt)

(3) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, puis qu'elle est convergente. (0,75 pt)

—❧ Exercice 6 ————— (3 points)

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt.$

(1) En utilisant une intégration par parties, montrer que $(\forall x > 0); F(x) = 1 - \frac{1 + \ln x}{x}.$ (1,25 pt)

(2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x),$ puis interpréter géométriquement le second résultat. (0,75 pt)

(3) Dresser le tableau de variations de F sur $\mathbb{R}_+^*.$ (1 pt)



❧ EXERCICES BONUS ❧

Facultatifs, non comptés dans la note sur 20 — chaque exercice est noté sur 2 points supplémentaires, soit 6 points de bonus au maximum.

— Exercice bonus n° 1 (2 pt)

Pour tout n de $\mathbb{N},$ soit f_n la transformation du plan qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = e^{i\frac{n\pi}{3}}z + 2.$

Déterminer, suivant les valeurs de $n,$ la nature de f_n et ses éléments caractéristiques.

— Exercice bonus n° 2 (2 pt)

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}.$ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) $(1+z)^n = e^{2in\theta},$ puis en déduire que

$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin(n\theta)}{2^{n-1}}.$$

— Exercice bonus n° 3 (2 pt)

Soit f une fonction continue sur $[0; 1].$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^n f(x) dx = 0.$

