

DEVOIR SURVEILLÉ N° 4 — MODÈLE 3

Nombres complexes — Bijection et aires — Suites d'intégrales — Équations différentielles

2^{ème} Bac Sciences Maths • Durée 4 heures • Barème sur 20 • Prof. Saad Choukri

Le plan complexe ($\mathcal{P}$) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Exercice 1 (2,5 points)

Pour tout z de $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ on pose $f(z) = \frac{z+1}{-i(z+i)}$.

- (1) Écrire $f(i)$ sous forme trigonométrique. (0,5 pt)
- (2) Déterminer puis construire l'ensemble $(E_1) = \{M(z) ; f(z) \in \mathbb{R}\}$. (0,75 pt)
- (3) Déterminer puis construire l'ensemble $(E_2) = \{M(z) ; f(z) \in i\mathbb{R}\}$. (0,5 pt)
- (4) Déterminer puis construire l'ensemble $(E_3) = \{M(z) ; |f(z)| = 1\}$. (0,75 pt)

Exercice 2 (3,5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

- (1) Montrer que f est impaire, puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. (0,5 pt)
- (2) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 1 - [f(x)]^2$, puis dresser le tableau de variations de f . (0,5 pt)
- (3) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $] -1; 1[$. (0,75 pt)
- (4) Montrer que $(\forall x \in] -1; 1[) ; f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$. (0,75 pt)
- (5) Construire $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ dans un repère orthonormé d'unité 1 cm. (0,5 pt)
- (6) Soit $\lambda \in]0; 1[$. Calculer, en cm^2 et en fonction de λ , l'aire du domaine délimité par $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$. (0,5 pt)

Exercice 3 (4 points)

Pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout x de $\mathbb{R}^+$ on pose $F_n(x) = \int_0^x [f(t)]^n dt$, où f est la fonction de l'exercice précédent.

- (1) Calculer $F_0(x)$ et $F_1(x)$ en fonction de x . (0,5 pt)
- (2) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; 0 \leq F_n(x) \leq x [f(x)]^n$, puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x)$. (0,75 pt)
- (3) Montrer que $(\forall k \in \mathbb{N}) ; F_k(x) - F_{k+2}(x) = \frac{1}{k+1} [f(x)]^{k+1}$. (1 pt)
- (4) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; F_{2n}(x) = x - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} [f(x)]^{2k-1}$. (1 pt)
- (5) Calculer $f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$, puis en déduire la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1) \times 3^{2k-1}}$. (0,75 pt)

Exercice 4 (4,5 points)

Partie A. Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

- (1) Montrer que $D_g = \mathbb{R}$ et que g est impaire. (0,5 pt)

- (2) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}); g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, puis dresser le tableau de variations de g . (0,5 pt)
- (3) Étudier la branche infinie de (C_g) au voisinage de $+\infty$. (0,5 pt)
- (4) Montrer que g est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, puis vérifier que g^{-1} est la fonction $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. (0,75 pt)

Partie B. Soit F la fonction définie par $F(0) = \ln 2$ et $F(x) = \int_x^{2x} \frac{g(t)}{t^2} dt$ pour $x \neq 0$.

- (1) Montrer que $(\forall t \geq 0); 1 - \frac{t^2}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \leq 1$, puis en déduire que $(\forall t \geq 0); t - \frac{t^3}{6} \leq g(t) \leq t$. (0,75 pt)
- (2) En déduire que $(\forall x > 0); \ln 2 - \frac{x^2}{4} \leq F(x) \leq \ln 2$. (0,75 pt)
- (3) Montrer que F est paire, puis en déduire que F est continue et dérivable en 0 en précisant $F'(0)$. (0,75 pt)

Exercice 5 _____ (2,5 points)

- (1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) $z^2 - (3+i)z + 2 + 2i = 0$. (0,75 pt)
- (2) Soient A, B et C les points d'affixes respectives $2, 1+i$ et 0 . Déterminer la nature du triangle ABC . (0,75 pt)
- (3) Déterminer la rotation de centre B qui transforme A en C , puis écrire son expression complexe. (0,5 pt)
- (4) Déterminer et construire l'ensemble $\{M(z); |z-2| = |z-1-i|\}$. (0,5 pt)

Exercice 6 _____ (3 points)

- (1) Résoudre l'équation différentielle (E) $y'' + 9y = 0$, puis déterminer la solution u de (E) vérifiant $u(0) = 1$ et $u'(0) = 3$. (1 pt)
- (2) Résoudre l'équation différentielle (E') $y' - 2y = 0$, puis déterminer la solution v de (E') vérifiant $v(0) = 3$. (0,75 pt)
- (3) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{3}} u(x) dx$ et $\int_0^1 v(x) dx$. (1,25 pt)



EXERCICES BONUS

Facultatifs, non comptés dans la note sur 20 — chaque exercice est noté sur 2 points supplémentaires, soit 6 points de bonus au maximum.

— Exercice bonus n° 1 (2 pt)

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$.

— Exercice bonus n° 2 (2 pt)

Soit f une fonction continue et positive sur un segment $[a; b]$ telle que $\int_a^b f(t) dt = 0$.



Montrer que f est nulle sur $[a; b]$.

— **Exercice bonus n° 3**

(2 pt)

Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ telle que $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$.

Montrer qu'il existe $c \in]0; 1[$ tel que $f(c) = c$.