

DEVOIR SURVEILLÉ N° 4 — MODÈLE 2

Nombres complexes et transformations — Équations différentielles — Calcul intégral — Suites adjacentes

2^{ème} Bac Sciences Maths • Durée 4 heures • Barème sur 20 • Prof. Saad Choukri

Le plan complexe ($\mathcal{P}$) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

❧ Exercice 1 (3 points)

Pour tout z de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ on pose $f(z) = i \times \frac{z - 2i}{z - i}$. On note A et B les points d'affixes respectives $2i$ et i .

- (1) Déterminer dans $\mathbb{C}$ les deux solutions u et v de l'équation (E) $f(z) = z$, avec $\operatorname{Re}(u) = 1$. (0,75 pt)
- (2) Déterminer puis construire l'ensemble $\{M(z) ; |f(z)| = 1\}$. (0,5 pt)
- (3) On considère les points $C(u)$, $D(v)$, $M(z)$ et $M'(f(z))$, où $z \in \mathbb{C} \setminus \{i, u, v\}$.
 - (a) Montrer que $\frac{f(z) - u}{f(z) - v} = -\frac{z - u}{z - v}$. (0,75 pt)
 - (b) En déduire que $(\overrightarrow{DM'}, \overrightarrow{CM'}) \equiv \pi + (\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{CM}) [2\pi]$. (0,25 pt)
 - (c) Montrer que si C , D et M sont alignés, alors C , D et M' sont alignés. (0,25 pt)
 - (d) Montrer que si C , D et M ne sont pas alignés, alors C , D , M et M' sont cocycliques. (0,5 pt)

❧ Exercice 2 (3 points)

On considère les nombres complexes $\alpha = 1 + i$ et $\beta = 1 - i$.

- (1) Écrire α et β sous forme trigonométrique. (0,5 pt)
- (2) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Écrire α^n sous forme trigonométrique. (0,5 pt)
- (3) Soient A et B les points d'affixes respectives α^n et β . On pose $w = \frac{\alpha^n}{\beta}$.
Déterminer un argument de w . (0,5 pt)
- (4) En déduire les valeurs de n pour lesquelles les points O , A et B sont alignés. (0,75 pt)
- (5) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles le triangle OAB est rectangle en O . (0,75 pt)

❧ Exercice 3 (3,5 points)

Soit F la fonction définie par $F(0) = 1$ et $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$ pour $x \neq 0$.

- (1) Montrer que $D_F = \mathbb{R}$, puis que F est paire. (0,5 pt)
- (2) Montrer que $(\forall x > 0); \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \leq \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \leq x$. (0,75 pt)
- (3) En déduire que F est continue en 0. (0,5 pt)
- (4) Montrer que $(\forall t \geq 1); \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \leq \frac{1}{t}$, puis en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. (0,75 pt)
- (5) Montrer que F est dérivable et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, puis dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$. (1 pt)

❧ Exercice 4 (4,5 points)

Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$, $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$.

- (1) Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. Que peut-on en déduire? (1 pt)
- (2) Pour tout n de $\mathbb{N}$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = e^{-x} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} x^k$.
- (a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); f'_n = -f_{n-1}$. (0,75 pt)
- (b) Montrer par récurrence que $(\forall x \in \mathbb{R}^+); f_{2n}(x) \leq 0 \leq f_{2n+1}(x)$. (1,25 pt)
- (3) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n \leq \frac{1}{e} \leq u_n$, puis déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. (0,75 pt)
- (4) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); \left| S_n - \frac{1}{e} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!}$, puis en déduire la limite de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$. (0,75 pt)

—❧— **Exercice 5** ————— (3 points)

- (1) Résoudre l'équation différentielle (E) $y'' - 3y' + 2y = 0$. (0,75 pt)
- (2) Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. (0,75 pt)
- (3) Résoudre l'équation différentielle (E') $y'' + 4y = 0$, puis déterminer la solution g de (E') vérifiant $g(0) = 0$ et $g'(0) = 2$. (0,75 pt)
- (4) Vérifier que la fonction $h : x \mapsto x - 1$ est une solution particulière de l'équation (E'') $y' + y = x$, puis résoudre (E''). (0,75 pt)

—❧— **Exercice 6** ————— (3 points)

Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$.

- (1) Calculer J_0 et J_1 . (0,75 pt)
- (2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); J_n + J_{n+2} = \frac{1}{n+1}$. (0,75 pt)
- (3) Montrer que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive, puis en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq J_{n+2} \leq \frac{1}{2(n+1)}$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$. (0,75 pt)
- (4) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} n J_n$. (0,75 pt)



—❧— **EXERCICES BONUS** —❧—

Facultatifs, non comptés dans la note sur 20 — chaque exercice est noté sur 2 points supplémentaires, soit 6 points de bonus au maximum.

— **Exercice bonus n° 1** ————— (2 pt)

Montrer que $(\forall (z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2); |z + z'| = |z| + |z'| \iff \arg(z) \equiv \arg(z') [2\pi]$.

— **Exercice bonus n° 2** ————— (2 pt)

Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx$.

- (1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$. (1 pt)



(2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); (n+1)I_n + I_{n+1} = e$, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n$. (1 pt)

— Exercice bonus n° 3

(2 pt)

Montrer que $(\forall a \in \mathbb{C} \setminus [-1; 1]) (\exists! b \in \mathbb{C}); \begin{cases} a = \frac{1}{2} \left(b + \frac{1}{b} \right) \\ |b| > 1 \end{cases}$