

DEVOIR SURVEILLÉ N° 4 — MODÈLE 1

Nombres complexes — Calcul intégral — Suites d'intégrales

2^{ème} Bac Sciences Maths • Durée 4 heures • Barème sur 20 • Prof. Saad Choukri

Le plan complexe ($\mathcal{P}$) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

→✦ Exercice 1 _____ (3 points)

- (1) Écrire le nombre complexe $\sqrt{3} + i$ sous forme trigonométrique. (0,5 pt)
- (2) Déterminer puis construire dans ($\mathcal{P}$) l'ensemble $(D) = \left\{ M(z) ; \arg \left(\frac{\sqrt{3} + i}{z} \right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \right\}$. (0,75 pt)
- (3) Pour tout $z = x + iy$ de $\mathbb{C}$ on pose $F(z) = 5z^2 + 3z\bar{z} + 20i$.
Montrer que $F(z) = (8x^2 - 2y^2) + i(10xy + 20)$. (0,75 pt)
- (4) Déterminer puis construire les ensembles $(H) = \{M(z) ; F(z) \in \mathbb{R}\}$ et $(\Sigma) = \{M(z) ; F(z) \in i\mathbb{R}\}$. (1 pt)

→✦ Exercice 2 _____ (3 points)

Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

- (1) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, puis en déduire sa limite. (1 pt)
- (2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, puis calculer I_0, I_1 et I_2 . (1 pt)
- (3) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; (-1)^n I_n = \ln 2 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$, puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$. (1 pt)

→✦ Exercice 3 _____ (4,5 points)

Partie I. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$ et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- (1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis interpréter géométriquement le second résultat. (0,5 pt)
- (2) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}}$, puis dresser le tableau de variations de f . (0,5 pt)
- (3) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(-x) = x + f(x)$, puis en déduire que la droite $(\Delta) y = -x$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$. (0,75 pt)
- (4) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f''(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$, puis étudier la concavité de $(\mathcal{C}_f)$. (0,5 pt)
- (5) Construire (Δ) et $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (0,5 pt)

Partie II. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(0) = \ln 2$ et $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ pour $x \neq 0$.

- (1) Montrer que $(\forall u \geq 0) ; \ln(1 + u) \leq u$, puis que $(\forall x > 0) ; 0 \leq F(x) \leq \frac{1 - e^{-x}}{x}$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. (0,75 pt)
- (2) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; F(-x) = \frac{x}{2} + F(x)$. (0,5 pt)

- (3) En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$, puis montrer que (C_F) admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote oblique que l'on déterminera. (0,5 pt)

—❧ Exercice 4 — (4,5 points)

Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta$.

- (1) Calculer I_0, I_1 et I_2 . (0,75 pt)
- (2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); I_n > 0$. (0,5 pt)
- (3) Étudier la monotonie de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, puis en déduire qu'elle est convergente. (0,75 pt)
- (4) En utilisant une intégration par parties, montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$. (0,75 pt)
- (5) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); (n+1) I_{n+1} I_n = \frac{\pi}{2}$. (0,75 pt)
- (6) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq \frac{I_n}{I_{n+1}} \leq \frac{n+2}{n+1}$, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}}$. (0,5 pt)
- (7) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. (0,5 pt)

—❧ Exercice 5 — (2,5 points)

Calculer les intégrales suivantes.

- (1) $A = \int_0^1 x e^{-x} dx$ (0,5 pt)
- (2) $B = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$ (0,75 pt)
- (3) $C = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx$ (0,5 pt)
- (4) $D = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$ (0,75 pt)

—❧ Exercice 6 — (2,5 points)

Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $u_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

- (1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. (0,75 pt)
- (2) En utilisant une intégration par parties, montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = (n+1)u_n - \frac{1}{e}$. (1 pt)
- (3) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n$. (0,75 pt)



—❧ EXERCICES BONUS —❧

Facultatifs, non comptés dans la note sur 20 — chaque exercice est noté sur 2 points supplémentaires, soit 6 points de bonus au maximum.

— Exercice bonus n° 1 — (2 pt)



Montrer que $(\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2) ; |z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$, puis interpréter géométriquement ce résultat.

— Exercice bonus n° 2

(2 pt)

Soit f une fonction numérique continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout x de $\mathbb{R}$ on pose $G(x) = f(x) \int_0^x f(t) dt$.

Montrer que si G est décroissante sur $\mathbb{R}$, alors f est nulle sur $\mathbb{R}$.

— Exercice bonus n° 3

(2 pt)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^+$ vérifiant $f(0) = 0$ et $(\exists a \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}^+); f'(x) \leq a f(x)$.

Montrer que f est nulle sur $\mathbb{R}^+$.