

DEVOIR SURVEILLÉ N° 3 — MODÈLE 4

Synthèse — Logarithme — Suites adjacentes — Primitives — T.A.F.

2^{ème} Bac Sciences Maths • Durée 4 heures • Barème sur 20 • Prof. Saad Choukri

❧ Exercice 1 _____ (3 points)

(1) Montrer que $(\forall x \geq 0); x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$. (1,5 pt)

(2) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$. (1,5 pt)

❧ Exercice 2 _____ (4,5 points)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les suites définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

(1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$. (1,25 pt)

(2) Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. (2 pt)

(3) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente, puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. (1,25 pt)

❧ Exercice 3 _____ (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{\ln x}}$, et soit F une primitive de f sur $]1; +\infty[$. On considère la fonction G définie sur $[1; +\infty[$ par $G(1) = 0$ et $(\forall x \in]1; +\infty[); G(x) = F(x^2) - F(x)$.

(1) Montrer que $(\forall x \in]1; +\infty[); G(x) > 0$. (0,5 pt)

(2) Montrer que G est dérivable sur $]1; +\infty[$ et que $(\forall x \in]1; +\infty[); G'(x) = (\sqrt{2}x^2 - 1)f(x)$, puis en déduire le sens de variations de G . (1,5 pt)

(3) En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$(\forall x \in]1; \sqrt[4]{e}[); \frac{x^3(x-1)}{\sqrt{2 \ln x}} < G(x) < \frac{x^2(x-1)}{\sqrt{\ln x}} \quad (1,5 \text{ pt})$$

(4) En déduire que G est continue à droite en 1. (1 pt)

(5) Étudier la dérivabilité de G à droite en 1, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu. (1 pt)

(6) Montrer que $(\forall x \in]\sqrt{e}; +\infty[); G(x) > \frac{x^2(x-1)}{\sqrt{\ln x}}$, puis en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$. (0,5 pt)

❧ Exercice 4 _____ (4,5 points)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = 2u_n + n - 1$.

(1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq n$, puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. (0,75 pt)

- (2) Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = u_n + n$. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique en précisant sa raison et son premier terme. (1,25 pt)
- (3) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n . (0,5 pt)
- (4) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}$. (1,5 pt)
- (5) En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{k}{2^k}$. (0,5 pt)

— **Exercice 5** ————— (2 points)

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose $a_n = \frac{n^2}{2^n}$.

- (1) Montrer que $(\forall n \geq 3); a_{n+1} \leq \frac{8}{9} a_n$. (1 pt)
- (2) En déduire que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n}$. (1 pt)



 EXERCICES BONUS

Facultatifs, non comptés dans la note sur 20 — chaque exercice est noté sur 2 points supplémentaires, soit 6 points de bonus au maximum.

— **Exercice bonus n° 1** (2 pt)

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = f(x)$.

Montrer que la fonction $x \mapsto f(x)e^{-x}$ est constante sur $\mathbb{R}$, puis en déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de $f(0)$.

— **Exercice bonus n° 2** (2 pt)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les suites définies par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\sqrt{k}}$ et $v_n = \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^n \frac{E(k\sqrt{k})}{k\sqrt{k}}$, où E désigne la partie entière.

Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente en déterminant sa limite.

— **Exercice bonus n° 3** (2 pt)

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = (x-n)^3 + (x-n+1)^3 + \cdots + x^3 - (x+1)^3 - (x+2)^3 - \cdots - (x+n)^3$$

- (1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\exists! \alpha_n \in \mathbb{R}); f_n(\alpha_n) = 0$. (1,25 pt)
- (2) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{3n(n+1)}$. (0,75 pt)

