

DEVOIR SURVEILLÉ N° 3 — MODÈLE 3

Fonction exponentielle — Étude et bijection — Suites récurrentes — Sommes

2^{ème} Bac Sciences Maths • Durée 4 heures • Barème sur 20 • Prof. Saad Choukri

Exercice 1 (3,5 points)

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

(1) Montrer que u est impaire, puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$. (0,5 pt)

(2)

(a) Montrer que u est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J à déterminer. (0,75 pt)

(b) Déterminer $u^{-1}(x)$ pour tout x de J . (0,75 pt)

(3) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}); u''(x) = \frac{8e^{2x}(1 - e^{2x})}{(e^{2x} + 1)^3}$, puis étudier la concavité de la courbe (C_u) . (0,75 pt)

(4) Construire les courbes (C_u) et $(C_{u^{-1}})$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (0,75 pt)

Exercice 2 (5,5 points)

Soit f la fonction définie par $f(0) = 1$ et $f(x) = \frac{2x}{x + u(x)}$ pour $x \neq 0$, où u est la fonction de l'exercice précédent.

(1) Vérifier que $D_f = \mathbb{R}$, puis montrer que f est paire. (0,5 pt)

(2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. (0,75 pt)

(3)

(a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}); u'(x) = 1 - u^2(x)$. (0,25 pt)

(b) En déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}^+); x - \frac{x^3}{3} \leq u(x) \leq x$. (0,75 pt)

(4) Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x - u(x)}{2x^2} \times f(x)$, puis étudier la dérivabilité de f en 0. (0,75 pt)

(5)

(a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $(\forall x \in \mathbb{R}^*); f'(x) = 2 \times \frac{u(x) - x u'(x)}{(x + u(x))^2}$. (1 pt)

(b) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que $f(\mathbb{R}^+) = [1; 2]$. (1 pt)

(6) Construire la courbe (C_f) dans un repère orthonormé. (0,5 pt)

Exercice 3 (5 points)

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\varphi(t) = t - u(t)$, où u est la fonction de l'exercice 1.

(1)

(a) Montrer que $(\forall t \in \mathbb{R}^+); 0 \leq \varphi'(t) \leq t^2$. (0,75 pt)

(b) En déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}^+); 0 \leq \varphi(x) \leq \frac{x^3}{3}$. (0,75 pt)

(2) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \sqrt[3]{\varphi(u_n)}$.

(a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{3}} u_n$. (1 pt)

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite. (0,75 pt)

(3) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^n u \left(\frac{1}{n+k} \right)$.

(a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \frac{-1}{3n^2} \leq S_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \leq 0$. (1 pt)

(b) En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite. (On admet que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \ln 2$.) (0,75 pt)

Exercice 4 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x e^{x-1}$.

(1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis dresser le tableau de variations de f . (1 pt)

(2) Montrer que f réalise une bijection de $[-1; +\infty[$ vers un intervalle J à déterminer, puis montrer que f^{-1} est dérivable en 1 et calculer $(f^{-1})'(1)$. (1 pt)

(3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$. (0,75 pt)

(4) Construire $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (Δ) $y = x$ dans un repère orthonormé. (0,75 pt)

(5) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in]0; 1[$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n < 1$. (0,75 pt)

(b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. (0,75 pt)

(c) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite. (1 pt)



FIN DU SUJET



EXERCICES BONUS



Facultatifs, non comptés dans la note sur 20 — chaque exercice est noté sur 2 points supplémentaires, soit 6 points de bonus au maximum.

Exercice bonus n° 1 (2 pt)

Montrer que $(\forall x > 0); e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$, puis en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$.

Exercice bonus n° 2 (2 pt)

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites définies par $a_0 > b_0 > c_0 > 0$ et

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n + c_n}{3}, \quad b_{n+1} = \sqrt[3]{a_n b_n c_n}, \quad \frac{1}{c_{n+1}} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} + \frac{1}{c_n} \right)$$

(1) Montrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. (1,25 pt)

(2) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = L$, où L est la limite commune de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$. (0,75 pt)

Exercice bonus n° 3 (2 pt)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite arithmétique à termes strictement positifs vérifiant $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = 1$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_{n+k}}$ est convergente.

