

DEVOIR SURVEILLÉ N° 3 — MODÈLE 2

Suites numériques — Suites définies par une équation — Méthode de Newton — Fonction logarithme

2^{ème} Bac Sciences Maths • Durée 4 heures • Barème sur 20 • Prof. Saad Choukri

Exercice 1 _____ (2 points)

Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $u_n = \sin \left[\pi \left(1 + \sqrt{3} \right)^n \right]$.

Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); \left(1 + \sqrt{3} \right)^n + \left(1 - \sqrt{3} \right)^n \in 2\mathbb{Z}$, puis en déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente en déterminant sa limite. (2 pt)

Exercice 2 _____ (4 points)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites définies par $u_n = \frac{2n+1}{3^n}$ et $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$.

(1) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite. (0,75 pt)

(2) Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique en précisant sa raison et son premier terme. (1 pt)

(3) Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{2k+1}{3^k}$. En calculant $\sum_{k=0}^{n-1} v_k$ de deux façons, montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); S_n = 3 - \frac{n+2}{3^n}$. (1,5 pt)

(4) Calculer la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$. (0,75 pt)

Exercice 3 _____ (4 points)

Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{\ln x}}$.

(1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis interpréter géométriquement le premier résultat. (0,75 pt)

(2) Montrer que $(\forall x \in]1; +\infty[); f'(x) = \frac{2 \ln x - 1}{2 \left(\sqrt{\ln x} \right)^3}$, puis dresser le tableau de variations de f . (1 pt)

(3) Soit n un entier naturel tel que $n \geq 3$. Montrer que l'équation $f(x) = n$ admet exactement deux solutions u_n et v_n telles que $1 < u_n < \sqrt{e} < v_n$. (0,75 pt)

(4) Montrer que $(\forall n \geq 3); v_n > n$, puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$. (0,75 pt)

(5) Montrer que $(\forall n \geq 3); \frac{1}{n^2} < \ln u_n < \frac{e}{n^2}$, puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. (0,75 pt)

Exercice 4 _____ (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$ et soit $I = \left[0; \frac{1}{2} \right]$.

(1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle I . (0,75 pt)

(2) Soit h la fonction définie sur I par $h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

(a) Montrer que h est bien définie sur I et que $h(I) \subset I$. (1 pt)

(b) Montrer que $(\forall x \in I); h(x) - \alpha = \frac{2x + \alpha}{3(x^2 - 1)}(x - \alpha)^2$. (1,25 pt)

(c) En déduire que $(\forall x \in I); |h(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3} |x - \alpha|^2$. (0,75 pt)

(3) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = h(u_n)$.

(a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); \frac{2}{3} |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3} |u_n - \alpha| \right)^2$. (0,5 pt)

(b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_n - \alpha| \leq \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^{2^n}$, puis déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. (0,75 pt)

✧ Exercice 5 (5 points)

Soit $a \in]0; 1[$. Pour tout n de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, soit f_n la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f_n(x) = 2x^n - x^{n-1} - a$.

(1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $]0; 1[$ et que $\alpha_n > \frac{1}{2}$. (1,25 pt)

(2) Montrer que $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$, puis en déduire la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$. (1,25 pt)

(3) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est convergente, puis montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^n = a$. (1,25 pt)

(4) Montrer que $(\forall n \geq 2); 0 \leq \frac{\alpha_n - \sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}} \leq \frac{(\alpha_n)^n - a}{na}$, puis en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{\sqrt[n]{a}} = 1$. (1,25 pt)



FIN DU SUJET



EXERCICES BONUS



Facultatifs, non comptés dans la note sur 20 — chaque exercice est noté sur 2 points supplémentaires, soit 6 points de bonus au maximum.

— Exercice bonus n° 1 (2 pt)

Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $v_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$ et $w_n = v_n + \frac{1}{(4n+4)!}$.

Montrer que les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

— Exercice bonus n° 2 (2 pt)

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\sqrt{k}}$.

Montrer que $(\forall k \geq 2); \frac{1}{k\sqrt{k}} \leq 2 \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right)$, puis en déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

— Exercice bonus n° 3 (2 pt)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{1}{4} + (u_n)^2$.

Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{2}$, puis en déduire la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

