

DEVOIR SURVEILLÉ N° 3 — MODÈLE 1

Fonctions logarithme et exponentielle — Primitives — Suites numériques

2^{ème} Bac Sciences Maths • Durée 4 heures • Barème sur 20 • Prof. Saad Choukri

❧ Exercice 1 _____ (3 points)

- (1) Montrer que $(\forall x > 0); \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$. (1,5 pt)
- (2) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. (1,5 pt)

❧ Exercice 2 _____ (5 points)

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = nx - \ln x$.

- (1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$, puis dresser le tableau de variations de f_n . (1 pt)
- (2) Montrer que l'équation $(E_n) f_n(x) = n + 1$ admet exactement deux solutions u_n et v_n telles que $0 < u_n < \frac{1}{n} < 1 < v_n$. (1,25 pt)
- (3) Montrer que $(\forall n \geq 2); v_n \leq 2$ et que $v_n = 1 + \frac{1 + \ln v_n}{n}$, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(v_n - 1)$. (1,5 pt)
- (4) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n \leq e^{-n}$, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n u_n$. (1,25 pt)

❧ Exercice 3 _____ (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 1$ et $f(x) = \frac{x e^x}{e^x - 1}$ pour $x \neq 0$.

- (1) Montrer que f est continue en 0. (0,75 pt)
- (2) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*); f(x) - f(-x) = x$. (0,75 pt)
- (3) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis montrer que la droite $(\Delta) y = x$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$. (1 pt)
- (4) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*); f'(x) = \frac{e^x (e^x - 1 - x)}{(e^x - 1)^2}$, puis, après avoir comparé e^x et $1 + x$, dresser le tableau de variations de f . (1,75 pt)
- (5) Construire $(\mathcal{C}_f)$ et (Δ) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (0,75 pt)
- (6) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers un intervalle J à déterminer. (1 pt)

❧ Exercice 4 _____ (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$, et soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ vérifiant $F(0) = 0$. On pose $G(x) = F(2x) - F(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

- (1) Dresser le tableau de variations de f . (0,75 pt)
- (2) Montrer que F est impaire, puis que G est impaire. (0,75 pt)
- (3) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}); G'(x) = 2f(2x) - f(x)$, puis en déduire que G est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right]$. (1,25 pt)

(4) En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); \frac{x}{\sqrt{16x^4 + 4x^2 + 1}} < G(x) < \frac{x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$$

puis en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$ et que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); G(x) < x$. (1,5 pt)

(5) Montrer que $G\left(\left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right) \subset \left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. (0,75 pt)

(6) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = G(u_n)$.

Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, étudier la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, puis montrer qu'elle est convergente et calculer sa limite. (1 pt)



EXERCICES BONUS

Facultatifs, non comptés dans la note sur 20 — chaque exercice est noté sur 2 points supplémentaires, soit 6 points de bonus au maximum.

— **Exercice bonus n° 1** (2 pt)

Montrer que $(\forall (a, b, x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^4); x \ln\left(\frac{x}{a}\right) + y \ln\left(\frac{y}{b}\right) \geq (x + y) \ln\left(\frac{x + y}{a + b}\right)$.

— **Exercice bonus n° 2** (2 pt)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par e , puis en déduire qu'elle est convergente.

— **Exercice bonus n° 3** (2 pt)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \sqrt[x]{x}$.

(1) Dresser le tableau de variations de g . (0,75 pt)

(2) En déduire que $(\forall n \geq 3); \sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$, puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n}$. (0,75 pt)

(3) Comparer les nombres e^π et π^e . (0,5 pt)

