

DEVOIR SURVEILLÉ N° 2 — MODÈLE 4

Synthèse — T.A.F. — Bijection réciproque — Fonction Arctangente — Suites numériques

2^{ème} Bac Sciences Maths • Durée 4 heures • Barème sur 20 • Prof. Saad Choukri

❧ Exercice 1 _____ (3 points)

Soient a et b deux éléments de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tels que $a < b$.

(1) Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $\frac{\sin b - \sin a}{b - a} = \cos c$. (1,5 pt)

(2) Montrer que ce réel c est unique. (1,5 pt)

❧ Exercice 2 _____ (3 points)

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{R}^*$ tels que $a^2 \neq b^2$.

(1) En utilisant le théorème de Rolle, montrer que

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) (\exists c \in]0; x[); \frac{a \sin(bx) - b \sin(ax)}{x^3} = \frac{ab}{3} \times \frac{\cos(bc) - \cos(ac)}{c^2} \quad (1,5 \text{ pt})$$

(2) En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a \sin(bx) - b \sin(ax)}{x^3} = \frac{ab(a^2 - b^2)}{6}$. (1,5 pt)

❧ Exercice 3 _____ (5 points)

Soit f la fonction définie sur $I =]-1; 1[$ par $f(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(1)

(a) Dresser le tableau de variations de f . (0,75 pt)

(b) En déduire que f est une bijection de I vers $\mathbb{R}$. (0,5 pt)

(2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans I et que $\frac{4}{5} < \alpha < 1$. (1 pt)

(3) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}); f^{-1}(x) = \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2 + 1}}$. (0,75 pt)

(4) Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = f\left(\cos \frac{\pi}{2}(x+1)\right)$.

(a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $\mathbb{R}$. (0,75 pt)

(b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(\forall x \in \mathbb{R}); (g^{-1})'(x) = \frac{-2}{\pi((x+1)^2 + 1)}$. (0,75 pt)

(c) Exprimer $g^{-1}(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$. (0,5 pt)

❧ Exercice 4 _____ (5 points)

Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose

$$u_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1}, \quad v_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}, \quad F_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \quad (x \in \mathbb{R}^+)$$

(1) Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. (1 pt)

- (2) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+); F'_n(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}$. (1 pt)
- (3) En déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}^+); F_{2n+1}(x) \leq \text{Arctan}(x) \leq F_{2n}(x)$. (1,5 pt)
- (4) Utiliser le résultat de la question (3) pour déterminer la limite commune des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. (1,5 pt)

—❧ Exercice 5 ————— (4 points)

Soient $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = x^n - t(1-x)$.

- (1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $\mathbb{R}^+$ et que $0 < \alpha_n < 1$. (1 pt)
- (2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); f_{n+1}(\alpha_n) = -t(1-\alpha_n)^2$, puis en déduire la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. (1,25 pt)
- (3) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. (0,75 pt)
- (4) Montrer par l'absurde que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1$. (1 pt)



❧ EXERCICES BONUS ❧

Facultatifs, non comptés dans la note sur 20 — chaque exercice est noté sur 2 points supplémentaires, soit 6 points de bonus au maximum.

— Exercice bonus n° 1 (2 pt)

Montrer que $(\forall t \in \mathbb{R}_+^*); \text{Arctan}(t) - \frac{t}{1+t^2} > 0$.

— Exercice bonus n° 2 (2 pt)

(1) En utilisant le théorème de Rolle, montrer que $(\forall t \in \mathbb{R}_+^*)(\exists c \in]0; t[); \frac{t - \text{Arctan } t}{t^3} = \frac{1}{3(1+c^2)}$. (1,25 pt)

(2) En déduire la limite $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - \text{Arctan } t}{t^3}$. (0,75 pt)

— Exercice bonus n° 3 (2 pt)

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$, où $0 < a < b$.

Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $f(c) - c f'(c) = \frac{b f(a) - a f(b)}{b - a}$.

