

DEVOIR SURVEILLÉ N° 2 — MODÈLE 3

Théorème de Rolle — T.A.F. — Dérivée de la fonction réciproque — Suites définies par une équation

2^{ème} Bac Sciences Maths • Durée 4 heures • Barème sur 20 • Prof. Saad Choukri

→❧ Exercice 1 _____ (1,5 points)

Soient a, b et c des nombres réels.

Montrer que l'équation (E) $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - (a + b + c) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0; 1[$. (1,5 pt)

→❧ Exercice 2 _____ (2 points)

Soit f une fonction continue sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ et dérivable sur $\left]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$ telle que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Montrer qu'il existe $c \in \left]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $(1 + \cos^2(2c)) \times f'(c) = 2 \sin(2c)$. (2 pt)

→❧ Exercice 3 _____ (3 points)

Soit f la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \sqrt[3]{\sin x}$.

(1) Montrer que f est une bijection de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ vers un intervalle J à déterminer. (1 pt)

(2) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0; 1[$ et que $(\forall x \in]0; 1[); (f^{-1})'(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$. (1 pt)

(3) Étudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en 0 et à gauche en $x_0 = 1$, puis interpréter géométriquement les résultats. (1 pt)

→❧ Exercice 4 _____ (3,5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x + \sqrt{1+x^2}$.

(1) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$. (1 pt)

(2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = x \times f^{-1}(x)$.

(a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = \frac{-f(x)}{x + f(x)}$. (0,75 pt)

(b) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); g'(x) = -x$, puis en déduire l'expression de $f^{-1}(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. (1,75 pt)

→❧ Exercice 5 _____ (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \cos x$.

(1)

(a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. (1 pt)

(b) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{4}$. (0,75 pt)

(2)

(a) Montrer qu'il existe $c \in \left] \alpha; \frac{\pi}{4} \right[$ tel que $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \times f'(c)$. (0,75 pt)

(b) Montrer que $f'(c) > \frac{3}{2}$, puis en déduire que $\frac{\pi + 4\sqrt{2}}{12} < \alpha < \frac{\pi}{4}$. (1,5 pt)

—❧ Exercice 6 ————— (6 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = x^n + \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)$.

- (1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists! \alpha_n \in \mathbb{R}^+); f_n(\alpha_n) = 1$. (1,5 pt)
- (2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 < \alpha_n < 1$ et que $(\forall x \in]0; 1[); f_{n+1}(x) < f_n(x)$. (1,5 pt)
- (3) Étudier la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, en déduire qu'elle est convergente, puis montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1$. (1,5 pt)
- (4) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - (\alpha_n)^n) = 1$. (1,5 pt)



❧ EXERCICES BONUS ❧

Facultatifs, non comptés dans la note sur 20 — chaque exercice est noté sur 2 points supplémentaires, soit 6 points de bonus au maximum.

— Exercice bonus n° 1 (2 pt)

- (1) Soit f une fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) \leq k$, où k est un réel strictement négatif donné. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. (1 pt)
- (2) Soit g une fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $(\forall x \in \mathbb{R}); g'(x) < 0$. La fonction g est-elle une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$? Justifier la réponse. (1 pt)

— Exercice bonus n° 2 (2 pt)

Soit f une fonction dérivable et strictement croissante sur $[-1; 2]$ vérifiant $(\forall x \in]-1; 2[); f'(x) \leq \frac{1}{2}$. Répondre par *vrai* ou *faux* en justifiant.

- (1) $(\exists \alpha \in]-1; 2[); 3f'(\alpha) - f(2) + f(-1) = 0$.
- (2) f^{-1} est dérivable en $\beta = f(\alpha)$ et $(f^{-1})'(\beta) = \frac{3}{f(2) - f(-1)}$.
- (3) $(\forall x \in [-1; 2]); |f(x) - f(0)| \leq \frac{1}{2}|x|$.
- (4) On suppose de plus que $f(-1) = 0$ et $f(2) = 1$; alors l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution λ dans $] -1; 2[$.

— Exercice bonus n° 3 (2 pt)

Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ et dérivable sur $]0; 1[$ telle que $f(0) = 0$ et $(\forall x \in]0; 1[); f'(x) \neq 0$.

Montrer que $(\forall x \in]0; 1]); f(x) > 0$ ou bien $(\forall x \in]0; 1]); f(x) < 0$.

