

DEVOIR SURVEILLÉ N° 2 — MODÈLE 2

Suites numériques — Suites récurrentes et adjacentes — Dérivabilité — Fonction Arctangente

2^{ème} Bac Sciences Maths • Durée 4 heures • Barème sur 20 • Prof. Saad Choukri

Exercice 1 _____ (3,5 points)

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = x^n - 1 + \text{Arctan}(x)$.

- (1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $\mathbb{R}^+$ et que $0 < \alpha_n < 1$. (1 pt)
- (2) Montrer que $(\forall x \in]0; 1[); f_{n+1}(x) < f_n(x)$, puis en déduire la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. (1 pt)
- (3) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. (0,75 pt)
- (4) Montrer par l'absurde que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1$. (0,75 pt)

Exercice 2 _____ (5 points)

Partie I. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3 + 4x}{8}$.

- (1) Montrer que f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. (0,5 pt)
- (2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$, puis étudier le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}$. (1 pt)
- (3) Déterminer $f(]-\infty; 0])$, $f([0; 2])$ et $f([2; +\infty[)$. (0,75 pt)

Partie II. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n)$.

- (1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur u_0 pour que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit constante. (0,75 pt)
- (2) On suppose que $u_0 \in]0; 2[$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite. (0,75 pt)
- (3) On suppose que $u_0 \in]-2; 0[$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite. (0,5 pt)
- (4) On suppose que $u_0 \in]2; +\infty[$. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. (0,75 pt)

Exercice 3 _____ (3 points)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les suites définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$$

- (1) Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. (2 pt)
- (2) Calculer la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$. (1 pt)

Exercice 4 _____ (4,5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{\text{Arctan } x}{x-1}$.

- (1) Calculer les limites de f aux bornes de D_f , puis interpréter les résultats obtenus. (0,75 pt)
- (2) Montrer que $(\forall x \in D_f); f'(x) = \frac{\varphi(x)}{(1+x^2)(x-1)^2}$, où $\varphi(x) = x - 1 - (1+x^2) \text{Arctan } x$. (0,5 pt)

(3)

- (a) Dresser le tableau de variations de la fonction φ sur $\mathbb{R}$. (0,5 pt)
- (b) Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $-\sqrt{3} < \alpha < -1$. (0,75 pt)
- (c) En déduire le signe de φ sur $\mathbb{R}$. (0,25 pt)

(4)

- (a) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{1+\alpha^2}$, puis en déduire que $\frac{1}{4} < f(\alpha) < \frac{1}{2}$. (0,75 pt)
- (b) Dresser le tableau de variations de f , puis écrire l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point O origine du repère. (0,5 pt)

- (5) Construire la courbe (C_f) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (0,5 pt)

 Exercice 5 _____ (4 points)

Soit f la fonction définie sur $I = \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ par $f(x) = 1 + 3\cos^2 x$.

- (1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. (0,75 pt)

(2)

- (a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1; 4[$ et que $(\forall x \in]1; 4[); (f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x^2 + 5x - 4}}$. (0,75 pt)

- (b) Montrer que $\left(\forall x \in \left] \frac{7}{4}; \frac{13}{4} \right[\right); \frac{1}{3} \leq (f^{-1})'(x) < \frac{2}{3}$. (0,5 pt)

(3)

- (a) Calculer $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$. (0,5 pt)

- (b) Montrer que l'équation (E) $f^{-1}(x) = x$ admet une unique solution α dans $\left] \frac{7}{4}; \frac{13}{4} \right[$. (0,75 pt)

- (c) Montrer que $\left(\forall x \in \left] \alpha; \frac{13}{4} \right[\right); \frac{1}{3}(x + 2\alpha) < f^{-1}(x) < \frac{1}{3}(2x + \alpha)$. (0,75 pt)



EXERCICES BONUS



Facultatifs, non comptés dans la note sur 20 — chaque exercice est noté sur 2 points supplémentaires, soit 6 points de bonus au maximum.

— **Exercice bonus n° 1** (2 pt)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); a_n \neq 1$.

Calculer, pour $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(a_n + a_n^2 + a_n^3 + \dots + a_n^k) - k}{a_n - 1}$.

— **Exercice bonus n° 2** (2 pt)

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.



Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$, puis en déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

— **Exercice bonus n° 3**

(2 pt)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les suites définies par

$$\begin{cases} u_1 = 1, & u_2 = 2 \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*); u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_1 = 9, & v_2 = 6 \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*); v_{n+2} = \sqrt{v_n} + \sqrt{v_{n+1}} \end{cases}$$

Montrer que ces deux suites sont convergentes et déterminer la limite de chacune d'elles.