

DEVOIR SURVEILLÉ N° 2 — MODÈLE 1

Théorème de Rolle — Théorème des accroissements finis — Dérivabilité — Suites récurrentes

2^{ème} Bac Sciences Maths • Durée 4 heures • Barème sur 20 • Prof. Saad Choukri

✦ Exercice 1 _____ (2 points)

Soit f une fonction numérique continue sur $[0; 1]$ et dérivable sur $]0; 1[$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
Montrer qu'il existe $c \in]0; 1[$ tel que $f(c) \times f'(c) = \frac{1}{2}$. (2 pt)

✦ Exercice 2 _____ (3 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x \cos x}$.

(1) En appliquant le théorème de Rolle, montrer qu'il existe $a \in]0; \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan a = \frac{1}{a}$. (1,5 pt)

(2) En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe $b \in]0; \frac{\pi}{3}[$ tel que $f'(b) = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}$. (1,5 pt)

✦ Exercice 3 _____ (4,5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 \right)$.

(1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. (0,5 pt)

(2) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = \frac{1}{2(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$, puis dresser le tableau de variations de f . (0,75 pt)

(3) Montrer que $I(0; f(0))$ est un point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C}_f)$. (0,5 pt)

(4) Construire $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ en précisant la tangente au point I . (0,5 pt)

(5) Soit h la fonction définie sur $] -\infty; 0]$ par $(\forall x \in] -\infty; 0[); h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ et $h(0) = -1$.

(a) Montrer que h est continue sur $] -\infty; 0]$. (0,5 pt)

(b) Montrer que h est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et que $(\forall x < 0); h'(x) = x f'(x)$. (0,75 pt)

(c) Montrer que $(\forall x < 0) (\exists c \in]x; 0[); \frac{h(x) + 1}{x} = c f'(c)$. (0,5 pt)

(d) En déduire que h est dérivable à gauche en 0 et déterminer $h'_g(0)$. (0,5 pt)

✦ Exercice 4 _____ (5 points)

Soit f la fonction définie sur $I = \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \sqrt{1 + \tan x}$.

(1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}^+$. (1 pt)

(2) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); (f^{-1})'(x) = \frac{2x}{x^4 - 2x^2 + 2}$. (1,25 pt)

(3) Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $u_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} f^{-1}(k)$. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); f^{-1}(n) \leq u_n \leq f^{-1}(2n)$. (1,5 pt)

(4) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en justifiant la réponse. (1,25 pt)

— **Exercice 5** ————— (5,5 points)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{Arctan} x + 1)$.

(1) Dresser le tableau de variations de g et montrer que g est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J à déterminer. (0,75 pt)

(2) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}); |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$. (0,75 pt)

(3) Montrer que l'équation (E) $g(x) = x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in]0; 1[$. (1 pt)

(4) Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 \in \mathbb{R}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); v_{n+1} = g(v_n)$.

(a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); |v_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|v_n - \alpha|$. (1 pt)

(b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}); |v_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |v_0 - \alpha|$, puis calculer la limite de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. (1 pt)

(5) Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \alpha$. (1 pt)



FIN DU SUJET



EXERCICES BONUS



Facultatifs, non comptés dans la note sur 20 — chaque exercice est noté sur 2 points supplémentaires, soit 6 points de bonus au maximum.

— **Exercice bonus n° 1** (2 pt)

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 et vérifiant $(\forall x \in \mathbb{R}); f(2x) = f(x) \cos x$.

— **Exercice bonus n° 2** (2 pt)

Soit f une fonction numérique dérivable sur un segment $[a; b]$ telle que $f'_d(a) \times f'_g(b) < 0$.

Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

— **Exercice bonus n° 3** (2 pt)

Soit f une fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 0$ et $(\forall x \in \mathbb{R}); |f'(x)| \leq |f(x)|$.

Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = 0$.

