

DEVOIR SURVEILLÉ N° 1 — MODÈLE 4

Synthèse — Limites — Continuité — Fonction Arctangente — Bijection

2^{ème} Bac Sciences Maths • Durée 4 heures • Barème sur 20 • Prof. Saad Choukri

Exercice 1 (3,5 points)

On pose $\alpha = \text{Arctan } 2$.

- (1) Montrer que $\frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi$. (1 pt)
- (2) Calculer $\tan(2\alpha)$, puis en déduire que $2 \text{ Arctan } 2 = \pi - \text{Arctan} \left(\frac{4}{3} \right)$. (1,5 pt)
- (3) Montrer que $\text{Arctan} \left(\frac{1}{2} \right) + \text{Arctan} \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{\pi}{4}$. (1 pt)

Exercice 2 (3,5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \text{Arctan}(x+1) - \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x-1)$.

- (1) Montrer que f est impaire. (0,5 pt)
- (2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. (0,5 pt)
- (3) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations. (1 pt)
- (4) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J à déterminer. (0,5 pt)
- (5) Montrer que l'équation (E) $f(x) = \frac{\pi}{4}$ admet une unique solution a dans $\mathbb{R}$ et que $1 < a < 2$. (1 pt)

Exercice 3 (3 points)

Les trois questions sont indépendantes.

- (1) Soit f une fonction continue sur le segment $[a; b]$ telle que $f([a; b]) \subset [a; b]$. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[a; b]$. (1 pt)
- (2) Soient g et h deux fonctions continues sur $[0; 1]$ telles que $g([0; 1]) = [0; 1]$ et $h([0; 1]) \subset [0; 1]$. Montrer que l'équation $g(x) = h(x)$ admet au moins une solution dans $[0; 1]$. (1,25 pt)
- (3) Montrer que l'équation $\cos x = x$ admet une unique solution dans le segment $[0; 1]$. (0,75 pt)

Exercice 4 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \sin x$.

- (1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$. (1 pt)
- (2) Montrer que la fonction f^{-1} est impaire. (0,75 pt)
- (3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) $f^{-1}(x) = f(x)$. (1 pt)
- (4) Montrer qu'il existe une unique fonction g définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$(\forall x \in \mathbb{R}); g(x) - \sin[g(x)] = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

- (5) Montrer que la fonction g est paire et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. (0,75 pt)
- (6) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$. (0,5 pt)

(7) Déterminer la monotonie de g sur $\mathbb{R}^+$, puis dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$. (1 pt)

— **Exercice 5** ————— (4 points)

Calculer les limites suivantes.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) - 2 \sin x}{x^3}$ (1 pt)

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{2}{x}\right) \right)$ (1 pt)

(3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{Arctan} x - \frac{\pi}{4}}{x - 1}$ (1 pt)

(4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\operatorname{Arctan}(x + 1) - \operatorname{Arctan}(x) \right)$ (1 pt)



FIN DU SUJET



EXERCICES BONUS



Facultatifs, non comptés dans la note sur 20 — chaque exercice est noté sur 2 points supplémentaires, soit 6 points de bonus au maximum.

— **Exercice bonus n° 1** (2 pt)

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$(\mathcal{P}) \quad (\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2); f(x + y) + f(x - y) = 2(f(x) + f(y))$$

(1) Calculer $f(0)$, puis montrer que f est paire. (0,5 pt)

(2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{Z}); f(nx) = n^2 f(x)$. (0,5 pt)

(3) On pose $a = f(1)$. Montrer que $(\forall r \in \mathbb{Q}); f(r) = a r^2$. (0,5 pt)

(4) En déduire l'expression de $f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$. (0,5 pt)

— **Exercice bonus n° 2** (2 pt)

Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle ouvert I et admettant un extremum en un point x_0 de I . Montrer qu'il existe deux éléments distincts a et b de I tels que $f(a) = f(b)$.

— **Exercice bonus n° 3** (2 pt)

Soit f une fonction numérique continue sur $[0; 1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $c \in$

$$\left[0; \frac{1}{2}\right] \text{ tel que } f(c) = f\left(c + \frac{1}{2}\right).$$

