

# DEVOIR SURVEILLÉ N° 1 — MODÈLE 3

Continuité — Théorème des valeurs intermédiaires — Bijection — Trigonométrie

2<sup>ème</sup> Bac Sciences Maths • Durée 4 heures • Barème sur 20 • Prof. Saad Choukri

## ❧ Exercice 1 \_\_\_\_\_ (2 points)

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - (1+ax)}{x^2}$ , où  $a \in \mathbb{R}$ .

Déterminer la valeur du paramètre réel  $a$  pour laquelle  $f$  admet un prolongement par continuité  $g$  en 0, puis préciser  $g$ . (2 pt)

## ❧ Exercice 2 \_\_\_\_\_ (3 points)

(1) Montrer que l'équation  $(E_1) \ 4x^3 - 12x + 1 = 0$  admet une unique solution dans l'intervalle  $] -1; 1[$ . (1 pt)

(2) En déduire que l'équation  $(E_2) \ x^4 - 6x^2 + x = -1$  admet exactement deux solutions dans l'intervalle  $] -1; 1[$ . (2 pt)

## ❧ Exercice 3 \_\_\_\_\_ (4 points)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$ .

(1) Dresser le tableau de variations de  $f$ . (0,75 pt)

(2) Montrer que l'équation  $(E) \ f(x) = 0$  admet exactement trois solutions distinctes dans  $\mathbb{R}$ , toutes appartenant à  $] -1; 1[$ . (1,25 pt)

(3) Soit  $\alpha$  une solution de l'équation  $(E)$ .

(a) Montrer qu'il existe  $\theta \in ]0; \pi[$  tel que  $\alpha = \cos \theta$ , et que  $\cos(3\theta) = \frac{1}{2}$ . (1 pt)

(b) Déterminer les valeurs exactes des trois solutions de l'équation  $(E)$ . (1 pt)

## ❧ Exercice 4 \_\_\_\_\_ (5 points)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{\sqrt{4x^2 + 1}}$ .

(1) Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . (1 pt)

(2) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer. (0,5 pt)

(3) Calculer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x$  de  $J$ . (1 pt)

(4) Montrer que l'équation  $(E) \ f(x) = x$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$  et que  $\alpha \in \left] \frac{3}{4}; 1 \right[$ . (1,25 pt)

(5) Soit  $G$  la fonction définie sur  $\left[ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right]$  par

$$\left( \forall x \in \left[ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right] \right); G(x) = 2f\left(\frac{1}{2} \tan(\pi x)\right), \quad G\left(\frac{1}{2}\right) = 2, \quad G\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

Montrer que  $G$  est continue sur le segment  $\left[ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right]$ . (1,25 pt)

— **Exercice 5** — (6 points)

**Partie A.** On considère la fonction  $u : x \mapsto \frac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}$ .

Déterminer  $D_u$ , puis montrer que  $u$  admet un prolongement par continuité  $g$  en  $x_0 = 1$  que l'on déterminera. (1,5 pt)

**Partie B.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $I = \left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$  par  $f(x) = \tan\left(\pi\sqrt{1-x^2}\right)$ .

(1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^-} f(x)$  et montrer que  $f$  est continue sur  $I$ . (1,5 pt)

(2) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera. (1,5 pt)

(3) Calculer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x$  de  $J$ . (1,5 pt)



— **EXERCICES BONUS** —

*Facultatifs, non comptés dans la note sur 20 — chaque exercice est noté sur 2 points supplémentaires, soit 6 points de bonus au maximum.*

— **Exercice bonus n° 1** — (2 pt)

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  on pose  $u_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}$ . Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq \frac{n}{2}$ , puis en déduire la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

— **Exercice bonus n° 2** — (2 pt)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$  par  $f(x) = \frac{1}{m(1-\sqrt[m]{x})} - \frac{1}{n(1-\sqrt[n]{x})}$ , où  $(m, n) \in (\mathbb{N}^* \setminus \{1\})^2$  et  $m \neq n$ . Montrer que  $f$  admet un prolongement par continuité  $g$  en  $x_0 = 1$  que l'on déterminera.

— **Exercice bonus n° 3** — (2 pt)

Soit  $f$  une fonction numérique continue sur  $[0; 1]$  telle que  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ . On suppose que  $f$  est dérivable à droite en 0 et à gauche en 1, avec  $f'_d(0) = f'_g(1) = 0$ . Montrer que l'équation (E)  $f(x) = x$  admet au moins une solution dans l'intervalle  $]0; 1[$ .