

DEVOIR SURVEILLÉ N° 1 — MODÈLE 2

Continuité — Théorème des valeurs intermédiaires — Bijection — Fonction Arctangente

2^{ème} Bac Sciences Maths • Durée 4 heures • Barème sur 20 • Prof. Saad Choukri

❧ Exercice 1 _____ (3 points)

(1) Déterminer, suivant les valeurs du paramètre réel λ , l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation (E) $\frac{1}{1+x^{2013}} = \lambda$. (1 pt)

(2) Calculer les limites suivantes.

(a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[4]{\sin x} - \sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x}$ (1 pt)

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{Arctan}\left(1 - \sqrt[3]{x^2}\right) - \frac{\pi}{4}}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{Arctan}\left(1 - \sqrt[3]{x^2}\right) - \frac{\pi}{4}}{x}$ (1 pt)

❧ Exercice 2 _____ (2,5 points)

(1) On considère l'équation (F_1) $x^3 - 3\lambda^2 x + 2 = 0$, où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer, suivant les valeurs de λ , le nombre de solutions de (F_1) dans l'intervalle $]0; 2\lambda[$. (1 pt)

(2) On considère l'équation (F_2) $x^3 - 3\lambda x^2 - 3x + \lambda = 0$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer, suivant les valeurs du paramètre réel λ , le nombre de solutions de (F_2) dans l'intervalle $]0; 1[$.

Indication — on pourra étudier la fonction $x \mapsto \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$ et remarquer que $\tan(3\theta) = \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta}$. (1,5 pt)

❧ Exercice 3 _____ (4,5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]-\infty; 0]$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x - 1}$.

(1) Montrer que f est une bijection de I vers un intervalle J que l'on déterminera. (1 pt)

(2) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J . (0,75 pt)

(3) Soit φ la fonction définie sur $K = \left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right]$ par

$$\left(\forall x \in \left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right[\right); \varphi(x) = \frac{1}{f^{-1}(\cos(2x))} \quad \text{et} \quad \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

(a) Montrer que $\left(\forall x \in \left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right[\right); \varphi(x) = \frac{\sin(2x)}{\sin(2x) - 1}$. (0,75 pt)

(b) Montrer que φ est continue sur K . (0,75 pt)

(c) Montrer que φ est une bijection de K vers un intervalle L à déterminer, puis calculer $\varphi^{-1}(x)$ pour tout x de L . (1,25 pt)

❧ Exercice 4 _____ (6 points)

(1) Soit f la fonction définie sur $I = \left[0; \frac{\pi}{2} \right[$ par $f(x) = \frac{1}{2 \cos x}$.

(a) Montrer que f est une bijection de I vers un intervalle J à déterminer. (0,75 pt)

(b) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J . (0,5 pt)

- (2) Soit φ la fonction définie sur le segment $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $\varphi(x) = \sin x - 2 \cos^2 x$.
- (a) Dresser le tableau de variations de φ . (0,5 pt)
- (b) Montrer que l'équation $(E_1) \varphi(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et que $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{3}$. (0,75 pt)
- (c) En déduire le signe de φ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. (0,5 pt)
- (3) Soit h la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $h(x) = f(x) - x$.
- (a) Montrer que $h'(x) = \frac{\varphi(x)}{2 \cos^2 x}$, puis dresser le tableau de variations de h . (0,75 pt)
- (b) Calculer $h\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et en déduire que $h(\alpha) < 0$. (0,75 pt)
- (c) Montrer que l'équation $(E_2) h(x) = 0$ admet exactement deux solutions r_1 et r_2 telles que $\frac{\pi}{6} < r_1 < \frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3} < r_2 < \frac{5\pi}{12}$. (1 pt)
- (4) Construire dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$. (0,5 pt)

—❖❖❖ **Exercice 5** ————— (4 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{1-x}\right)$.

- (1) Déterminer D_f , puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. (0,75 pt)
- (2) Montrer que f est continue sur chacun des intervalles de D_f . (0,5 pt)
- (3) La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en $x = 1$? Justifier. (0,75 pt)
- (4) Étudier les variations de la fonction $u : x \mapsto \frac{x}{1-x}$, puis en déduire le tableau de variations de f sur D_f . (0,75 pt)
- (5) Soit ϕ la restriction de f à l'intervalle $I = [0; 1[$.
- (a) Montrer que ϕ est une bijection de I vers un intervalle J à déterminer. (0,75 pt)
- (b) Calculer $\phi^{-1}(x)$ pour tout x de J . (0,5 pt)



EXERCICES BONUS



Facultatifs, non comptés dans la note sur 20 — chaque exercice est noté sur 2 points supplémentaires, soit 6 points de bonus au maximum.

— **Exercice bonus n° 1** ————— (2 pt)

- (1) Soit f une fonction numérique continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période $T > 0$, et telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$. (1 pt)
- (2) En déduire que la fonction $g : x \mapsto \sin x$ n'admet pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$. (1 pt)

— **Exercice bonus n° 2** ————— (2 pt)



Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique continue et injective sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$. (On pourra raisonner par l'absurde.)

— **Exercice bonus n° 3**

(2 pt)

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres réels du segment $[a; b]$, où $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $a < b$. Montrer que l'équation (E) $\frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^n |x - a_k| = \frac{b-a}{2}$ admet au moins une solution dans $[a; b]$.