

DEVOIR SURVEILLÉ N° 1 — MODÈLE 1

Limites — Continuité — Théorème des valeurs intermédiaires — Fonction réciproque

2^{ème} Bac Sciences Maths • Durée 4 heures • Barème sur 20 • Prof. Saad Choukri

❧ Exercice 1 _____ (3 points)

(1) Calculer les limites suivantes. (1,5 pt)

$$(i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}{x + \sqrt[3]{x} - 2} \quad \text{et} \quad (ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 + 1} \right)$$

(2) La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en x_0 dans chacun des cas suivants ? On précisera ce prolongement lorsqu'il existe. (1,5 pt)

$$(i) \begin{cases} f(x) = \frac{\sin(\pi\sqrt{\cos x})}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} f(x) = \frac{\sin(\cos(\frac{\pi}{2}x))}{x+1} \\ x_0 = -1 \end{cases}$$

❧ Exercice 2 _____ (2 points)

Soit f une fonction numérique continue sur le segment $[1; 2]$ telle que $f([1; 2]) \subset [3; 4]$.

(1) Montrer que l'équation (E) $\frac{f(x)}{x} = 2$ admet au moins une solution dans $]1; 2]$. (1 pt)

(2) On suppose de plus que f est dérivable sur $]1; 2[$ et que $(\forall x \in]1; 2[); f'(x) > 2$. Montrer que la solution de (E) est unique. (1 pt)

❧ Exercice 3 _____ (5 points)

(1) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = 2x^3 - 11x^2 + 20x - 14$.

(a) Dresser le tableau de variations de φ . (0,75 pt)

(b) Montrer que l'équation (E₁) $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $\frac{5}{2} < \alpha < 3$. (1 pt)

(c) En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$. (0,25 pt)

(2) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $F(x) = x^2 - 3x + \frac{2}{x-2}$.

(a) Montrer que $(\forall x \neq 2); F'(x) = \frac{\varphi(x)}{(x-2)^2}$, puis dresser le tableau de variations de F en précisant les limites aux bornes. (1,25 pt)

(b) Montrer que $F(\alpha) = \frac{\frac{1}{2}\alpha^2 - 4\alpha + 9}{\alpha - 2}$, puis en déduire que $F(\alpha) > 0$. (0,75 pt)

(c) Montrer que l'équation (E₂) $F(x) = 0$ admet une unique solution β dans $\mathbb{R}$ et que $-1 < \beta < 0$. (1 pt)

❧ Exercice 4 _____ (6 points)

Soit f la fonction définie sur $I =]-\infty; 1]$ par

$$f(0) = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{-1 + \sqrt{1-x}}{x} \quad \text{pour } x \neq 0.$$

(1)

(a) Montrer que $(\forall x \in I); f(x) = \frac{-1}{1 + \sqrt{1-x}}$, puis en déduire que f est continue sur I .

(0,75 pt)

(b) Montrer que f est une bijection de I vers un intervalle J que l'on déterminera.

(0,75 pt)

(c) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J .

(0,5 pt)

(d) Pour tout x de I on pose $h(x) = [2f(x) + 1]^3$. Montrer que h est une bijection de I vers un intervalle H à déterminer, puis déterminer la bijection réciproque h^{-1} .

(1 pt)

(2) Montrer que l'équation (E) $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ admet une unique solution α dans $]0; 1[$.

(0,75 pt)

(3) Soit G la fonction définie sur $K = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$ par

$$\left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]\right); G(x) = f(\tan x) \quad \text{et} \quad G\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

(a) Montrer que G est continue sur K .

(0,75 pt)

(b) Montrer que G est une bijection de K vers un intervalle L à déterminer.

(0,75 pt)

(c) Calculer $G^{-1}(x)$ pour tout x de L .

(0,75 pt)

Exercice 5 (4 points)

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation (G) $\text{Arctan}(x-1) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{19}{8}\right)$, et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \text{Arctan}(x-1) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.

(1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(0,5 pt)

(2) La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en 0? Justifier la réponse.

(0,75 pt)

(3) Déterminer $f(]0; +\infty[)$ et $f(]-\infty; 0[)$.

(1 pt)

(4)

(a) Montrer que l'équation (G) admet une unique solution appartenant à $]1; +\infty[$.

(0,75 pt)

(b) Déterminer la solution de l'équation (G).

(1 pt)



EXERCICES BONUS



Facultatifs, non comptés dans la note sur 20 — chaque exercice est noté sur 2 points supplémentaires, soit 6 points de bonus au maximum.

— Exercice bonus n° 1

(2 pt)

Soit f une fonction numérique continue sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); f(x) \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); f(x) = 0$.

— Exercice bonus n° 2

(2 pt)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $f_0 = 0, f_1 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.

(1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); (f_{n+1})^2 - f_n \times f_{n+2} = (-1)^n$.

(1 pt)



(2) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{f_{2n}} \right) = \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{f_{2n+1}} \right) + \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{f_{2n+2}} \right)$. (1 pt)

— Exercice bonus n° 3

(2 pt)

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2); |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|$$

Montrer que l'équation (E) $f(x) = x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.