



Session 2025

Sujet de Mathématiques

Durée : 4h

Le sujet de l'épreuve de mathématiques du concours général des sciences et techniques, session 2025, est composé d'un exercice et d'un problème indépendants à traité dans l'ordre souhaité.

Pour répondre à une question donnée du sujet, tout candidat peut admettre et utiliser les résultat des question qui la précèdent, même s'il ne les a pas traitées, à condition d'indiquer avec précision les références des questions utilisées.

Il est à noter que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments important pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de mentionner avec précision les références des questions abordées.

**L'usage de tout document ou matériel électronique est interdit**

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

## Exercice :

À propos de dérangements d'un ensemble fini

**Notation, définitions et rappels :**

Si  $n$  est un entier naturel non nul, on pose  $E_n = \{1, \dots, n\}$  :

- On appelle *permutation* de  $E_n$  toute bijection de  $E_n$  sur lui-même.
- Si  $\sigma$  est une permutation de  $E_n$ , on la note  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ .
- Si  $\sigma$  est une permutation de  $E_n$ , on appelle *point fixe* de  $\sigma$  tout élément  $k \in E_n$  tel que  $\sigma(k) = k$ .
- On appelle *dérangement* de  $E_n$ , toute permutation de  $E_n$  n'ayant aucun point fixe.
- On note  $\mathcal{S}_n$  l'ensemble des permutations de  $E_n$  et  $\mathcal{D}_n$  l'ensemble des dérangements de  $E_n$ .
- On rappelle que le cardinal de  $\mathcal{S}_n$  vaut  $n!$  et on note  $d_n$  le cardinal de  $\mathcal{D}_n$ .

**1.1.** Écrire la liste des éléments de chacun des ensembles  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ .

**1.2.** Donner les valeurs de  $d_1, d_2$  et  $d_3$ .

**1.3. Une première expression du nombre de dérangements :**

Soit  $n$  un entier naturel non nul, pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ , on note  $\mathcal{F}_k$  l'ensemble des permutations de  $E_n$  ayant exactement  $k$  point(s) fixe(s) et on pose :  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

**1.3.1.** Soit  $p \in \{0, \dots, n\}$ . Montrer que :  $\sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = \begin{cases} 1 & \text{Si } p = 0 \\ 0 & \text{Si } p \neq 0 \end{cases}$

**1.3.2.** Montrer que les ensembles  $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$  sont des ensembles deux à deux disjoints et que  $n! = \sum_{k=0}^n \text{Card}(\mathcal{F}_k)$ .

**1.3.3.** Déterminer  $\text{Card}(\mathcal{F}_n)$  et  $\text{Card}(\mathcal{F}_0)$  puis montrer que, pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$  :  $\text{Card}(\mathcal{F}_k) = \binom{n}{k} d_{n-k}$ .

**1.3.4.** En déduire que  $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k$ .

**1.3.5.** Déduire de ce qui précède que  $n! = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = d_n$ .

**1.4. Une deuxième expression du nombre de dérangements :**

Pour tout entier  $n \geq 0$ , on pose  $x_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ .

**1.4.1.** Montrer que les suites  $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes. On note  $l$  leur limite commune.

**1.4.2.** Montrer que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$ .

**1.4.3.** Montrer que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $|x_n - l| \leq \frac{1}{(n+1)!}$ .

**1.4.4.** On admet que  $l = \frac{1}{e}$ , montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $d_n$  est la partie entière du réel  $\frac{n!}{e} + \frac{1}{2}$ .

**1.5. Probabilité qu'une permutation soit un dérangement :**

Soit  $n$  un entier naturel non nul, on note  $p_n$  la probabilité qu'une permutation choisie au hasard (ie. de façon équiprobable) dans  $\mathcal{S}_n$  soit un dérangement.

**1.5.1.** Exprimer  $p_n$  en fonction de  $n$ .

**1.5.2.** La suite  $(p_n)_{n \geq 1}$  admet-elle une limite ? Si oui laquelle ?

**1.6. Une application probabilité :**

Soit  $n$  un entier naturel non nul. On répartit au hasard  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  dans  $n$  urnes également numérotées de 1 à  $n$ , en plaçant une seule boule par urne. On note  $X_n$  la variable aléatoire qui à une telle répartition associe le nombre de coïncidences entre le numéro de l'urne et celui de la boule qu'elle reçoit.

**1.5.1.** Déterminer la probabilité  $\mathbb{P}(X_n = 0)$  de l'événement  $\{X_n = 0\}$  et en déduire une expression de la probabilité  $\mathbb{P}(X_n \geq 1)$ .

**1.5.2.** Démontrer que pour tout entier  $q \in E_n$ ,  $\mathbb{P}(X_n = q) = \frac{1}{q!} \sum_{k=0}^{n-q} \frac{(-1)^k}{k!}$ .

**1.5.3.** Montrer que l'espérance de la variable aléatoire  $X_n$  est indépendante de l'entier  $n$ .

**Problème :**

Étude de quelques propriétés  
des fonctions absolument monotones

**Notation, définitions et rappels :**

- Dans ce problème,  $\mathbb{R}$  désigne l'ensemble des nombres réels et  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels. Si  $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ , avec  $k \leq n$ , on note  $\binom{n}{k}$  le coefficient binomial défini par :  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .
- On note  $\exp : x \mapsto e^x$  (resp.  $\ln : x \mapsto \ln(x)$ ) la fonction exponentielle (resp. logarithme népérien).
- Dérivées successives, classe d'une fonction :** Soient  $I$  un intervalle non trivial de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction numérique définie sur  $I$ , soit  $n$  un entier naturel non nul.
  - On dit que la fonction  $f$  est une fois dérivable sur  $I$  si elle est dérivable sur  $I$ , dans ce cas, on pose  $f^{(1)} = f'$ , où  $f'$  est la fonction dérivée de  $f$ ,  $f^{(1)}$  est appelée la *fonction dérivée d'ordre 1* (ou *dérivée première*) de la fonction  $f$ .
  - On dit que la fonction  $f$ , est deux fois dérivable sur  $I$  si la fonction  $f^{(1)}$  est dérivable sur  $I$ , dans ce cas, on pose  $f^{(2)} = (f^{(1)})'$ , où  $(f^{(1)})'$  est la fonction dérivée de  $f^{(1)}$ ,  $f^{(2)}$  est appelée la *fonction dérivée d'ordre 2* (ou *dérivée seconde*) de la fonction  $f$  et peut aussi se noter  $f''$ .
  - Par récurrence, on dit que la fonction  $f$  est  $n$ -fois dérivable sur  $I$  si la fonction  $f^{(n-1)}$  est dérivable sur  $I$ , dans ce cas, on pose  $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ , où  $(f^{(n-1)})'$  est la fonction dérivée de  $f^{(n-1)}$ ,  $f^{(n)}$  est appelée la *fonction dérivée d'ordre  $n$*  (ou *dérivée  $n$ -ième*) de la fonction  $f$ .
  - On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^p$ ,  $p \geq 1$ , sur  $I$  si elle est  $p$ -fois dérivable sur  $I$  et  $f^{(p)}$ , sa dérivée d'ordre  $p$ , est de plus continue sur  $I$ . Par convention, on pose  $f^{(0)} = f$  et on dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^0$  sur  $I$  si elle est continue sur  $I$ .
  - On dit que  $f$  est *indéfiniment dérivable* (ou de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ) sur  $I$  si elle est  $p$ -fois dérivable sur  $I$ , pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ .
- On admet que le produit (resp. la composée) de deux fonction  $p$ -fois dérivables (resp. de classe  $\mathcal{C}^p$ ) est  $p$ -fois dérivable (resp. de classe  $\mathcal{C}^p$ ), où  $p \in \mathbb{N}$ .
- Formule de Leibniz pour la dérivée d'un produit :** Soient  $I$  un intervalle non trivial de  $\mathbb{R}$  et  $n$  un entier naturel non nul. On considère deux fonctions numériques  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -fois dérivables sur  $I$ . Alors, la fonction  $fg$  est  $n$ -fois dérivable sur  $I$  et on a la formule dite de Leibniz :

$$\forall x \in I, (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

- **Définition :** Soit  $I$  un intervalle non trivial de  $\mathbb{R}$ . Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est dite **absolument monotone** sur  $I$  si elle est indéfiniment dérivable sur  $I$  et vérifie :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times I, f^{(n)}(x) \geq 0$$

Le problème comporte quatre parties et il a pour but d'étudier quelques propriétés remarquables des fonction absolument monotones. La première partie est consacrée à l'étude de quelques exemples et résultats généraux de ces fonctions. La seconde partie porte sur la formule de Taylor avec reste l'intégrale et une application à l'exponentielle. La troisième partie entame l'étude d'un théorème de Bernstein donnant une égalité étendue entre une fonction absolument monotone et son développement de Taylor. La quatrième partie est consacrée à l'étude de quelques autres propriétés des fonctions absolument monotones.

## Partie 1 :

Quelques exemples et résultats généraux  
sur les fonctions absolument monotones

### 1.1. Premiers exemples :

- 1.1.1. Montrer que la fonction exponentielle  $x \mapsto e^x$  est absolument monotone sur  $\mathbb{R}$ .
- 1.1.2. On considère la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}$  définie sur l'intervalle  $]0, 1[$ . Justifier que la fonction  $f$  est indéfiniment dérivable sur l'intervalle  $]0, 1[$ , en calculer les dérivées successives et montrer que la fonction  $f$  est absolument monotone sur  $]0, 1[$ .
- 1.1.3. Énoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients d'une fonction polynomiale réelle pour qu'elle soit absolument monotone sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ .

### 1.2. Un autre exemple :

On considère la fonction  $f : x \mapsto -\ln(1-x)$  définie sur l'intervalle  $[0, 1[$ .

- 1.2.1. Justifier que la fonction  $f$  est indéfiniment dérivable sur l'intervalle  $[0, 1[$  et préciser, pour tout entier  $n \geq 1$ , l'expression  $f^{(n)}(0)$ . Pour tout entier  $n \geq 1$ , on définit les deux fonctions  $u_n$  et  $v_n$  sur l'intervalle  $[0, 1[$  par :

$$\forall x \in [0, 1[, u_n(x) = \ln(1-x) + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} \text{ et } v_n(x) = u_n(x) + \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

- 1.2.2. Soit  $n \geq 1$ . Justifier que les fonctions  $u_n$  et  $v_n$  sont dérivables sur l'intervalle  $[0, 1[$  et donner, sous forme simplifiée, des expressions de leur dérivée. En déduire les signes des fonctions  $u_n$  et  $v_n$ .
- 1.2.3. Soit  $x \in [0, 1[$ . Montrer que la suite  $\left(\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}\right)_{n \geq 1}$  converge vers  $-\ln(1-x)$ . On écrit alors :

$$-\ln(1-x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

### 1.3. Quelques résultats généraux :

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles non triviaux de  $\mathbb{R}$ .

- 1.3.1. Justifier que toute fonction  $f$  absolument monotone sur  $I$  est positive, croissante et convexe sur  $I$ .
- 1.3.2. Montrer qu'une fonction  $f$  est absolument monotone sur  $I$  si, et seulement si, elle est positive, dérivable sur  $I$  et sa fonction dérivée  $f'$  est absolument monotone sur  $I$ .
- 1.3.3. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions absolument monotones sur l'intervalle  $I$ . Montrer que les fonctions  $f+g$  et  $fg$  sont absolument monotones sur  $I$ .
- 1.3.4. Montrer que si  $f$  est absolument monotone sur l'intervalle  $I$ , alors la fonction  $e^f$  est absolument monotone sur  $I$ . (On pourra raisonner par récurrence.)
- 1.3.5. On considère la fonction  $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  définie sur l'intervalle  $]0, 1[$ . Montrer que  $g$  est absolument monotone sur l'intervalle  $]0, 1[$ . On pourra considérer  $h : x \mapsto \ln(g(x))$  et calculer  $h'$ .
- 1.3.6. Montrer plus généralement que si  $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$  est absolument monotone sur  $J$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est absolument monotone sur  $I$ , avec  $\varphi(J) \subset I$ , alors la fonction  $f \circ \varphi$  est absolument monotone sur  $J$ . On pourra exploiter une récurrence bien énoncée pour montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(f \circ \varphi)^{(n)} \geq 0$ .

## Partie 2 :

Formule de Taylor avec reste intégrale  
Application à la fonction exponentielle

### 2.1. Formule de Taylor avec reste intégrale :

Soit  $I$  un intervalle non trivial de  $\mathbb{R}$  et soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$ , où  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $(a, b) \in I^2$  et tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ , on pose :

$$R_k = \int_a^b \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) dt$$

2.1.1. Montrer que pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$

$$R_{k-1} = \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_k$$

2.1.2. En déduire la formule de Taylor à l'ordre  $n$  avec reste intégrale suivante :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

### 2.2. Étude de quelques suites de nombre réels :

2.2.1. Soit  $(x_n)_{n \geq 0}$  une suite de nombres réels strictement positifs telle que la suite  $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n \geq 0}$  soit convergente de limite nulle. Montrer que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente de limite nulle.

2.2.2. Soit  $\lambda$  un nombre réel strictement positif. Montrer que la suite  $\left(\frac{\lambda^n}{n!}\right)_{n \geq 0}$  est convergente de limite nulle.

### 2.3. Application au calcul de la limite d'une suite :

2.3.1. Justifier que pour tout réel  $x$  et tout entier naturel  $n \geq 1$  :  $e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$ .

2.3.2. Montrer que, pour tout réel non nul  $x$  et tout entier naturel  $n \geq 1$ ,

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}$$

2.3.3. En déduire la limite de la suite  $\left(\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt\right)_{n \geq 1}$ , pour tout réel  $x$ .

2.3.4. Montrer que pour tout réel  $x$ , la suite numérique  $\left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}\right)_{n \geq 0}$  est convergente de limite  $e^x$ . On écrit alors :

$$e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

## Partie 3 :

Application au développement en série entière  
d'une fonction absolument monotone  
Théorème de Bernstein

### 3.1. Théorème de Bernstein sur un intervalle de la forme $[0, a[$ avec $0 < a < +\infty$ :

Soient  $a \in ]0, +\infty[ \cup \{+\infty\}$  et  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur l'intervalle  $[0, a[$  telle que sa restriction à l'intervalle  $]0, a[$  soit une fonction **absolument monotone** sur  $]0, a[$ , en particulier  $f$  vérifie :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times ]0, a[, f^{(n)}(x) \geq 0$$

Pour tout  $(n, x) \in \mathbb{N} \times [0, a[$ , on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \text{ et } R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu) du$$

**3.1.1.** Montrer soigneusement que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(n)}(0) \geq 0$ .

**3.1.2.** Montrer que pour tout  $x \in [0, a[$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x)$$

**3.1.3.** Montrer que, pour tout  $x \in [0, a[$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq R_n(x) \leq f(x)$  et  $0 \leq S_n(x) \leq f(x)$ .

**3.1.4.** Montrer que pour tout  $x \in [0, a[$ , la suite numérique  $(S_n(x))_{n \geq 0}$  est convergente. On posera alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)$$

**3.1.5.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ , établir que la fonction  $x \mapsto \frac{R_n(x)}{x^{n+1}}$ , définie sur l'intervalle  $]0, a[$ , est croissante.

**3.1.6.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ , montrer que, pour tout  $x \in [0, a[$  et tout  $y \in ]x, a[$  :

$$0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y)$$

**3.1.7.** En déduire que pour tout  $x \in [0, a[$ ,  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ .

**3.2. Extension du théorème de Bernstein à un intervalle de la forme  $] -a, a[$ , avec  $0 < a \leq +\infty$  :**

Soient  $a \in ]0, +\infty[ \cup \{+\infty\}$  et  $f$  une fonction **absolument monotone** sur l'intervalle  $] -a, a[$ , c'est-à-dire que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{+\infty}$  sur l'intervalle  $] -a, a[$  et vérifie :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times ] -a, a[, f^{(n)}(x) \geq 0$$

Pour tout  $(n, x) \in \mathbb{N} \times ] -a, a[$ , on pose  $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$  et  $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu) du$ .

**3.2.1.** Justifier que, pour tout  $x \in [0, a[$ , la suite numérique  $(S_n(x))_{n \geq 0}$  est convergente de limite  $f(x)$ .

**3.2.2.** Montrer que pour tout  $b \in ]0, a[$ , la suite numérique  $\left(\frac{f^{(n)}(0)}{n!} b^n\right)_{n \geq 0}$  est convergente de limite nulle.

**3.2.3.** Montrer que, pour tout  $x \in ] -a, 0[$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|R_n(x)| \leq \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} |x|^{n+1}$  puis en déduire que la suite

numérique  $(S_n(x))_{n \geq 0}$  est convergente de limite  $f(x)$ . On posera alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = f(x)$ .

**3.3. Application à la fonction tangente :**

Dans cette section, on considère la fonction  $f : x \mapsto \tan x$ , définie sur l'intervalle  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ .

**3.3.1.** Justifier que  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$  et préciser l'expression de  $f'$  en fonction de  $f$ .

**3.3.2.** Montrer que  $f$  est indéfiniment dérivable sur l'intervalle  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$  et que pour tout entier non nul  $n$ ,

$$f^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} f^{(n-k)}$$

**3.3.3.** Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ ,  $f^{(n)}(x) \geq 0$ .

Dans la suite, on pose  $a_n = f^{(n)}(0)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**3.3.4.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ , exprimer  $a_{n+1}$  en fonction de  $a_0, \dots, a_n$  puis calculer les coefficients  $a_0, \dots, a_6$ .

**3.3.5.** Montrer que, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $a_{2p} = 0$ .

**3.3.6.** Montrer que pour tout  $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ , la suite numérique  $\left(\sum_{k=0}^n a_{2k+1} x^{2k+1}\right)_{n \geq 0}$  est convergente de limite

$\tan x$ . On distinguera les cas  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$  et  $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ .

$$\tan x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_{2k+1} x^{2k+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$$

### Partie 4 :

D'autres propriétés des  
fonctions absolument monotones

#### 4.1. Théorème de Bernstein sur $\mathbb{R}$ :

Soit  $f$  une fonction **absolument monotone** sur  $\mathbb{R}$ , en particulier  $f$  vérifie :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, f^{(n)}(x) \geq 0$$

Pour tout triplet  $(n, x, x_0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , on pose  $S_{n, x_0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ .

**4.1.1.** Si  $x_0 \in \mathbb{R}$ . En utilisant la section 3.2. de la partie précédente, montrer que pour tout réel  $x$ , la suite numérique  $(S_{n, x_0}(x))_{n \geq 0}$  converge vers  $f(x)$ . On posera alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = f(x)$$

**4.1.2.** En déduire que si  $f$  s'annule en un point  $b \in \mathbb{R}$ , alors  $f$  est identiquement nulle.

**4.1.3.** On suppose qu'il existe un entier  $p \geq 1$  et  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $f^{(p)}(c) = 0$ . Montrer que la fonction  $f^{(p)}$  est identiquement nulle. Que peut-on alors dire de  $f$  ?

#### 4.2. Application à l'étude d'autres propriétés des fonctions absolument monotones :

Soit  $f$  une fonction **absolument monotone** et **non identiquement nulle** sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $(x, a) \in \mathbb{R}^2$ .

**4.2.1.** Montrer que la suite  $\left( \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} k(x-a)^k \right)_{n \geq 0}$  est convergente de limite  $(x-a)f'(x)$ .

**4.2.2.** Montrer que la suite  $\left( \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} k(k-1)(x-a)^k \right)_{n \geq 0}$  est convergente de limite  $(x-a)^2 f''(x)$ .

**4.2.3.** En déduire que la suite  $\left( \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} k^2(x-a)^k \right)_{n \geq 0}$  converge vers  $(x-a)^2 f''(x) + (x-a)f'(x)$ .

**4.2.4.** On suppose de plus que  $a < x$ . Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$\left( \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} k(x-a)^k \right)^2 \leq \left( \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right) \left( \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} k^2(x-a)^k \right)$$

Puis en déduire que :

$$(x-a)f'(x)^2 \leq f(x) ((x-a)f''(x) + f'(x))$$

**4.2.5.** Déduire de ce qui précède que  $f'^2 \leq f f''$ .

**4.2.6.** Montrer que  $f$  est strictement positive et que la fonction  $x \mapsto \ln(f(x))$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .

**4.3.** Soit  $f$  une fonction absolument monotone sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f(0) = f'(0) = 1$ . Montrer que  $f$  est strictement positive et que, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) \geq e^x$ .

## Fin du sujet