



Juillet 2023

Sujet de Mathématiques

Durée : 4h

Le sujet de l'épreuve de mathématiques du concours général des sciences et techniques, session 2023, est composé de deux problèmes largement indépendants à traité dans l'ordre souhaité, seul le résultat du premier est utile à la fin du second.

Pour répondre à une question donnée du sujet, tout candidat peut admettre et utiliser le résultat des question qui la précède, même s'il ne les a pas traitées, à condition d'indiquer avec précision les références des questions utilisées.

Il est à noter que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments important pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de mentionner avec précision les références des questions abordées.

L'usage de tout document ou matériel électronique est interdit

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Problème 1 :

Étude d'une suite définie par une relation de récurrence

Dans ce problème, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers. La fonction logarithme népérien sera notée $\ln$ et e désignera le nombre de Néper, base du logarithme népérien.

On considère l'ensemble, noté $\mathcal{M}$, des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels définies par la donnée de $u_0 \geq 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{n+1}$$

Pour tout nombre réel $x \geq 0$, on note $u(x)$ la suite appartenant à $\mathcal{M}$ et dont le premier terme vaut x , on note également $u_n(x)$ le terme d'indice n de cette suite. Ainsi $u_0(x) = x, u_1(x) = e^x, u_2(x) = \frac{e^{e^x}}{2}$, etc.

Partie 1 :

Étude préliminaire des éléments de $\mathcal{M}$

- 1.1. Vérifier que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}$, alors $u_n > 0$ pour tout $n \geq 1$.
- 1.2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}$, montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors $l = 0$.
- 1.3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}$, on suppose qu'il existe $n_0 \geq 2$ tel que $u_{n_0} \leq 1$.
 - 1.3.1. Montrer que, pour tout $n \geq n_0, u_n \leq 1$.
 - 1.3.2. En déduire que, pour tout $n \geq n_0 + 1, u_n \leq \frac{e}{n}$.
 - 1.3.3. Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
- 1.4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}$, on suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **ne converge pas** vers 0.
 - 1.4.1. Montrer que, pour tout $n \geq 2, u_n > 1$.
 - 1.4.2. En déduire que, pour tout $n \geq 2, u_n \leq \ln(n+1)$.
 - 1.4.3. Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
- 1.5. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}$, on suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n_0+1} \leq u_{n_0}$.
 - 1.5.1. Montrer que, pour tout $n \geq n_0, u_{n+1} \leq u_n$.
 - 1.5.2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

1.6. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}$. Montrer, de deux manières différentes, que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie soit l'une soit l'autre des deux assertions (i) et (ii) suivantes :

- (i) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. (ii) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$.

1.7. Étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}$ lorsque $u_0 = 0$:

On considère ici la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}$, avec $u_0 = 0$, et on donne $e \simeq 2,71828$ et $e^{\frac{5}{2}} \simeq 3,89286$.

1.7.1. Exprimer u_2 et u_3 puis en donner des valeurs approchées.

1.7.2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge 0.

Partie 2 :

Étude plus approfondie des éléments de $\mathcal{M}$

On note I_0 l'ensemble des réels $x \geq 0$ pour lesquels la suite $u(x)$ converge vers 0, et I_1 l'ensemble des réels $x \geq 0$ pour lesquels la suite $u(x)$ tend vers $+\infty$:

$$I_0 = \{x \geq 0 \mid u_n(x) \rightarrow 0\} \quad \text{et} \quad I_1 = \{x \geq 0 \mid u_n(x) \rightarrow +\infty\}$$

On note enfin $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) = e^x - \frac{(x+1)^3}{6}$$

2.1. Quelques propriétés de la fonction f :

2.1.1. Justifier que f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et calculer les dérivées première f' et seconde f'' de la fonction f .

2.1.2. Étudier la fonction f'' puis en déduire que la fonction f' est strictement croissante et positive sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

2.1.3. Montrer que la fonction f est à valeurs strictement positives sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

2.2. Étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}$ lorsqu'il existe $n_0 \geq 3$ tel que $u_{n_0} \geq n_0$:

On considère ici une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}$ pour laquelle il existe $n_0 \geq 3$ tel que $u_{n_0} \geq n_0$.

2.2.1. Montrer que si $n_0 = 3$ alors $u_n \geq n$ pour $n \in \{4, 5\}$. On prendra $e^3 \simeq 20,08$ et $e^4 \simeq 54,59$.

2.2.2. Montrer, dans le cas général, que $u_n \geq n$ pour tout $n \geq n_0$.

2.2.3. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

2.3. Étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}$ lorsque $u_0 = 1$:

On considère ici la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}$, avec $u_0 = 1$, et on donne $\ln(\ln(81)) \simeq 1,48$.

2.3.1. Exprimer u_3 puis montrer que $u_3 \geq 3$.

2.3.2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

2.4. Étude des sous-ensembles I_0 et I_1 de l'intervalle $[0, +\infty[$:

2.4.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto u_n(x)$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

2.4.2. En déduire que si $a \in I_0$, alors $[0, a] \subset I_0$ et que si $b \in I_1$, alors $[b, +\infty[\subset I_1$.

2.4.3. Montrer que $[1, +\infty[\subset I_1$ et que $I_0 \subset [0, 1[$.

2.4.4. Justifier que l'ensemble I_0 (resp. I_1) admet une borne supérieure (resp. inférieure) notée α (resp. β) et montrer que $\beta \leq \alpha$.

2.4.5. Montrer que $\beta = \alpha$ puis conclure que $[0, \alpha[\subset I_0 \subset [0, \alpha]$ et que $]\alpha, +\infty[\subset I_1 \subset [\alpha, +\infty[$. On pourra raisonner par l'absurde et utiliser le critère de la borne inférieure (resp. supérieure).

Partie 3 :

Étude de la suite $(u_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$
Calcul d'une valeur approchée de α

On rappelle que si J est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, alors h est continue en $x_0 \in J$ si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in J, \quad |x - x_0| < \eta \implies |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$$

On considère ici la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}$, avec $u_0 = \alpha$.

3.1. Étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

On cherche à montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Raisonnat par l'absurde, on suppose que $\alpha \in I_0$

3.1.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto u_n(x)$ est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

3.1.2. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n_0+1} \leq u_{n_0}$ puis justifier que $u_{n_0+1} < u_{n_0+1}$.

3.1.3. En considérant la fonction $g : x \mapsto u_{n_0+2}(x) - u_{n_0+1}(x)$, montrer qu'il existe $\nu > 0$ tel que :

$$\forall x \in [\alpha, \alpha + \nu[, \quad u_{n_0+2}(x) < u_{n_0+1}(x)$$

Puis en déduire une contradiction. *On pourra utiliser la question 1.5. de la première partie.*

3.2. Étude plus approfondie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

On rappelle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_n(\alpha)$.

3.2.1. Vérifier que $\alpha > 0$, $I_0 = [0, \alpha[$ et que $I_1 = [\alpha, +\infty[$.

3.2.2. Justifier que, pour tout $n \geq 1$, $\ln(n+1) < u_n$.

3.2.3. Montrer que, pour tout $n \geq 3$, $u_n \leq n$. *On pourra raisonner par l'absurde.*

3.3. Calcul d'une valeur approchée de α :

3.3.1. Soit $x \geq 0$. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) = \ln((n+1)u_{n+1}(x))$ puis en déduire que :

$$x = u_0(x) = \ln(1 \ln(2 \ln(3 \ln(\dots \ln(9 \ln(10 u_{10}(x))) \dots)))$$

3.3.2. Pour $u_{10}(x) = 10$, on trouve $x \simeq 0,3133$. Montrer alors que $\alpha \leq 0,3133$.

3.3.3. Pour $u_{10}(x) = 1$, on trouve $x \simeq 0,3132$. Montrer alors que $0,3132 < \alpha$.

3.3.4. En déduire une valeur approchée de α à 10^{-4} près par défaut.

Problème 2 :

Encadrement du nombre de nombres premiers
inférieurs à un entier naturel donné
Une démonstration du postulat de Bertrand

Notation, définitions et rappels :

Dans ce problème, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, on note $\mathcal{P}(n)$ l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à n et $p(n)$ le cardinal de $\mathcal{P}(n)$. Par exemple $\mathcal{P}(2) = \{2\}$ et $p(2) = 1$, $\mathcal{P}(3) = \mathcal{P}(4) = \{2, 3\}$ et $p(3) = p(4) = 2$, $\mathcal{P}(5) = \{2, 3, 5\}$ et $p(5) = 3$.

Définition : Si p est un nombre et n un entier naturel non nul, $v_p(n)$ désigne le plus grand entier naturel k tel que p^k divise n , autrement dit, p^k divise n et p^{k+1} ne divise pas n .

Exemple : $v_2(120) = 3$, $v_3(120) = 1$, $v_5(120) = 1$ et $v_p(120) = 0$ pour tout $p \in \mathcal{P} \setminus \{2, 3, 5\}$.

Si $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, avec $k \leq n$, on note $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial défini par : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Si x est un réel, $[x]$ désigne la partie entière de x . La fonction du logarithme népérien sera notée $\ln$.

Le but du problème est d'obtenir un encadrement de $p(n)$ en fonction de l'entier $n \geq 2$ d'une part, et de démontrer le postulat de Bertrand "Pour tout entier naturel non nul m , il existe un nombre premier dans l'ensemble $\{m+1, \dots, 2m\}$ " de l'autre.

Partie 1 :

Formule de Legendre et applications

Dans cette partie, p désigne un nombre premier quelconque.

1.1. Calculer $v_2(96)$ et $v_5(500)$.

1.2. Soient n, m et r des entiers naturels non nuls.

1.2.1. Calculer $v_p(nm)$ en fonction de $v_p(n)$ et $v_p(m)$.

1.2.2. Calculer $v_p(n^r)$ en fonction de $v_p(n)$ et r .

1.3. Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^{*2}$, on pose $F_k = \{x \in \{1, \dots, n\} \mid p^k \mid x\}$ et $E_k = \{x \in \{1, \dots, n\} \mid v_p(x) = k\}$.

1.3.1. Montrer que le cardinal de F_k , noté $\text{Card}(F_k)$, vérifie $\text{Card}(F_k) = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$. Que vaut ce nombre si $k > n$?

1.3.2. Montrer que le cardinal de E_k , noté $\text{Card}(E_k)$, vérifie $\text{Card}(E_k) = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor$. Préciser $\text{Card}(E_k)$ si $k > n$.



- 1.4.** Soit n un entier naturel non nul. Exprimer $v_p(n!)$ en fonction des nombres $\text{Card}(E_1), \dots, \text{Card}(E_n)$ et en déduire la formule ci-dessous dite de Legendre :

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

- 1.5.** Si x et y sont deux réels quelconques, montrer que $\lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0, 1\}$.

1.6. Applications :

1.6.1. Calculer $v_2(100!)$ et $v_5(100!)$.

1.6.2. Déterminer le nombre de zéros situés à droite dans l'écriture décimale de $100!$.

1.6.3. Montrer que, pour tout couple (n, m) d'entiers naturels ≥ 2 , le nombre $\frac{(2n)!(2m)!}{n!m!(n+m)!}$ est un entier naturel.

Partie 2 :

Une minoration de $p(n)$

- 2.1.** Soit n un entier naturel et soit j un entier compris entre 0 et n . Soit p un nombre premier quelconque.

2.1.1. Montrer que :

$$v_p\left(\binom{n}{j}\right) = \sum_{k=1}^n \left(\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{j}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-j}{p^k} \right\rfloor \right)$$

2.1.2. En déduire que :

$$v_p\left(\binom{n}{j}\right) \leq \frac{\ln n}{\ln p} \quad \text{et} \quad p^{v_p\left(\binom{n}{j}\right)} \leq n$$

2.2. Majoration des coefficients binomiaux :

Soit n un entier naturel ≥ 2 et soit j un entier compris entre 0 et n .

2.2.1. Montrer que les diviseurs premiers de $\binom{n}{j}$ sont inférieurs ou égaux à n .

2.2.2. En utilisant la factorisation de $\binom{n}{j}$ en puissances de nombres premiers, établir une majoration de $\binom{n}{j}$ en fonction de n et $p(n)$.

- 2.3.** Soit n un entier naturel ≥ 2 . Montrer que $2^n \leq nn^{p(n)}$ et en déduire une minoration de $p(n)$.

Partie 3 :

Majoration du produit des nombres premiers $\leq n$

Un encadrement de $p(n)$

Soit n un entier naturel ≥ 2 . On note $A(n)$ le produit de $\mathcal{P}(n)$:

$$A(n) = \prod_{p \in \mathcal{P}(n)} p = \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq n}} p$$

- 3.1.** En utilisant une minoration de $\prod_{\substack{p \in \mathcal{P}(n) \\ p \geq \sqrt{n}}} p$, montrer que $A(n) \geq \sqrt{n}^{p(n) - \sqrt{n}}$.

3.2. Majorations de produits de nombres premiers :

Soient $m \in \mathbb{N}^*$, on note $B(m)$ le produit de tous les nombres premiers p tels que $m + 2 \leq p \leq 2m + 1$.

3.2.1. Montrer que $B(m)$ divise $\binom{2m+1}{m}$.

3.2.2. Montrer que $\binom{2m+1}{m} \leq 4^m$ puis en déduire un majorant de $B(m)$.

3.2.3. En utilisant les résultats des questions précédentes, montrer par récurrence que $A(n) \leq 4^{n-1}$.

3.3. Une majoration puis un encadrement de $p(n)$:

3.3.1. Déduire des résultats précédents une majoration de $p(n)$.

3.3.2. Donner alors un encadrement de $p(n)$.

3.3.3. Quel meilleur encadrement de la forme :

$$a \frac{n}{\ln(n)} \leq 3p(n) \leq b \frac{n}{\ln(n)}, \text{ Pour } n \text{ assez grand}$$

Peut-on obtenir à l'aide des résultats précédents, avec $a, b \in \mathbb{N}^*$?

Partie 4 :

Une démonstration du postulat de Bertrand

Le but de cette partie est de démontrer le postulat de Bertrand, stipulant que pour tout entier naturel non nul m , il existe un nombre premier dans l'ensemble $\{m+1, m+2, \dots, 2m\}$. Ce postulat a été démontré en 1851 par Tchebychev. La preuve proposée ici est due à Erdős.

Ce postulat étant trivialement vérifié pour $m \in \{1, 2\}$, on considère un entier naturel n **supérieur ou égal à 3**.

4.1. Majoration de coefficients binomiaux :

4.1.1. Montrer que, pour tout entier naturel $k < n$, $\binom{2n}{k} < \binom{2n}{k+1}$.

4.1.2. En déduire que $\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n}$.

4.2. Majoration d'un coefficient binomial :

4.2.1. Justifier que, pour tout nombre premier p , $p^{v_p\left(\binom{2n}{n}\right)} \leq 2n$.

4.2.2. Montrer que, pour tout nombre premier $p > \sqrt{2n}$, $v_p\left(\binom{2n}{n}\right) \leq 1$.

4.2.3. Montrer que, pour tout nombre premier p tel que $\frac{2}{3}n < p \leq n$, on a $p \geq 3$ et $v_p\left(\binom{2n}{n}\right) = 0$.

4.2.4. En déduire que :

$$\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\sqrt{2n}} \left(\prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ \sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n}} p \right) \left(\prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ n < p \leq 2n}} p \right)$$

Dans la suite de cette partie, on cherche à établir le postulat de Bertrand pour l'entier n . Raisonnant par l'absurde, on suppose que l'ensemble $\{n+1, \dots, 2n\}$ ne contient aucun nombre premier.

4.3. Montrer que $\frac{4^n}{2n} \leq (2n)^{\sqrt{2n}} 4^{\frac{2}{3}n}$.

4.4. Une inégalité utile :

4.2.1. Justifier que, pour tout entier $m \geq 2$, $2^m > m+1$.

4.2.2. Montrer que $2n \leq 2^{6\sqrt{2n}}$.

4.5. Sous l'hypothèse faite ci-dessus, montrer que si $n \geq 50$ alors $2^{2n} < 2^{20(2n)^{2/3}}$, puis en déduire que $n < 4000$.

4.6. En considérant les nombres $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 13, p_6 = 23, p_7 = 43, p_8 = 83, p_9 = 163, p_{10} = 317, p_{11} = 631, p_{12} = 1259, p_{13} = 2503$ et $p_{14} = 4001$, dont on admet qu'ils sont tous premiers et vérifient $p_{k+1} < 2p_k$ pour tout $k \in \{1, \dots, 13\}$, démontrer que le postulat de Bertrand est vrai pour $n \leq 4000$.

4.7. Conclure.

Fin du sujet