



Juillet 2022

Sujet de Mathématiques

Durée: 4h

Le sujet de l'épreuve de mathématiques du concours général des sciences et techniques, session 2022, est composé de trois problèmes indépendants à traité dans l'ordre souhaité.

Pour répondre à une question donnée d'un problème, tout candidat peut admettre et utiliser les résultats des questions qui la précèdent, même s'il ne les a pas traitées, à condition d'indiquer avec précision les références des questions utilisées.

Il est à noter que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de mentionner avec précision les **références** des questions abordées.

L'usage de tout document ou matériel électronique est interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Problème 1

Étude d'une fonction définie par une intégrale

Application à l'étude d'une équation fonctionnelle

Dans ce problème, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels ; un intervalle de $\mathbb{R}$ est dit non trivial s'il contient au moins deux éléments distincts. Par "solution d'une équation différentielle", on fait référence aux solutions à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R}$.

1^{ère} Partie

Résultats préliminaires

Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue ; on note F la fonction définie sur I par :

$$\forall x \in I, \quad F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

1.1. Justifier que F est dérivable sur I et préciser sa dérivée.

1.2. Soit J un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et soient $u : J \rightarrow \mathbb{R}$, $v : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables à valeurs dans l'intervalle I . On considère les fonctions F_1 et F_2 définies sur l'intervalle J par :

$$\forall x \in J, \quad F_1(x) = \int_{x_0}^{v(x)} f(t) dt \quad \text{et} \quad F_2(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt.$$

1.2.1. Exprimer la fonction F_1 à l'aide des fonctions v et F .

1.2.2. Montrer que la fonction F_1 est dérivable sur J et préciser sa dérivée.

1.2.3. En déduire que la fonction F_2 est dérivable sur J et préciser sa dérivée.

2^{ème} Partie

Application à l'étude d'une équation fonctionnelle

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t) dt. \quad (1)$$

On suppose de plus que f n'est pas la fonction nulle et on considère un réel a tel que $f(a) \neq 0$.

2.1. Vérifier que $f(0) = 0$.

2.2. Quelques propriétés de la fonction f

2.2.1. Vérifier que, pour tout réel x , $f(x) = \frac{1}{f(a)} \int_{x-a}^{x+a} f(t) dt$.

2.2.2. Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

2.2.3. En déduire que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

2.3. Montrer que, pour tout couple (x, y) de réels,

$$f'(x)f(y) = f(x+y) - f(x-y) \quad \text{et} \quad f(x)f'(y) = f(x+y) + f(x-y).$$

2.4. On pose $\lambda = -\frac{f''(a)}{f(a)}$; déduire de ce qui précède que f est solution de l'équation différentielle linéaire

$$z'' + \lambda z = 0. \quad (\mathcal{E}_\lambda)$$

2.5. Étude de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_\lambda)$ et détermination de f

2.5.1. On suppose ici que $\lambda > 0$ et on pose $\mu = \sqrt{\lambda}$.

(i) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_\lambda)$.

(ii) En déduire que dans ce cas, il existe un réel non nul A tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = A \sin(\mu x)$$

puis montrer que $A = \frac{2}{\mu}$.

2.5.2. On suppose ici que $\lambda < 0$ et on pose $\mu = \sqrt{-\lambda}$.

(i) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_\lambda)$.

(ii) Montrer que toute solution g de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_\lambda)$ est de la forme $g = \alpha C_\mu + \beta S_\mu$, où α et β sont des réels et C_μ, S_μ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $C_\mu : x \mapsto \frac{e^{\mu x} + e^{-\mu x}}{2}$ et $S_\mu : x \mapsto \frac{e^{\mu x} - e^{-\mu x}}{2}$.

(iii) En déduire que dans ce cas, il existe un réel non nul A' tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = A' S_\mu(x).$$

(iv) Pour tout couple (x, y) de réels, exprimer $C_\mu(x \pm y)$ en fonction de $C_\mu(x), C_\mu(y), S_\mu(x)$ et $S_\mu(y)$ puis montrer que $A' = \frac{2}{\mu}$.

2.5.3. Si $\lambda = 0$ montrer que, pour tout réel x , $f(x) = 2x$.

2.6. Vérifier que chacune des fonctions trouvées ci-dessus satisfait bien l'équation fonctionnelle (1).

Problème 2

**À propos de familles de parties d'un ensemble
vérifiant la propriété $\mathcal{S}$**

Notations et définitions

Dans tout ce problème n désigne un entier naturel ≥ 2 .

Définition :

Soit E un ensemble à n éléments et soit p un entier naturel ≥ 2 ; on dit qu'une famille $(A_1, A_2, \dots, A_p)$ de parties de E possède la propriété $\mathcal{S}$ si

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, p\}^2, \quad i \neq j \implies A_i \not\subset A_j.$$

Exemple :

Si $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{1, 4\}$, $A_3 = \{2, 4\}$ et $A'_3 = \{1, 2\}$ alors la famille (A_1, A_2, A_3) possède la propriété $\mathcal{S}$ mais pas la famille (A_1, A_2, A'_3) puisque $A'_3 \subset A_1$.

Rappel :

Soit F un ensemble à m éléments, avec $m \in \mathbb{N}$. On rappelle que :

- L'ensemble des parties de F , noté $\mathcal{P}(F)$, possède 2^m éléments ; de plus, pour tout $k \in \{0, \dots, m\}$, le nombre de parties de F ayant k éléments est égal au coefficient binomial $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$.
- Si A et B sont deux parties de F telles que $A \subset B$ alors, $A = B$ si, et seulement si, A et B ont le même cardinal, c'est à dire le même nombre d'éléments ; ou encore $\text{card} A = \text{card} B$.

Le but du problème est de déterminer, en fonction de n , la valeur maximale du nombre p d'éléments d'une famille, de parties d'un ensemble E à n , possédant la propriété $\mathcal{S}$

1^{ère} Partie

Premiers exemples de familles vérifiant la propriété $\mathcal{S}$ et quelques résultats utiles

Dans cette partie, E désigne un ensemble à n éléments.

- 1.1. Écrire tous les couples (A_1, A_2) de parties de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ possédant la propriété $\mathcal{S}$.
- 1.2. Soit $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$; montrer que la famille (prise dans un ordre quelconque) de toutes les parties de E à k éléments possède la propriété $\mathcal{S}$. Quel est le nombre p des éléments de cette famille ?
- 1.3. Calculs sur les coefficients binomiaux

Dans toute la suite du problème, on pose

$$\omega(n) = \max_{0 \leq j \leq n} \binom{n}{j}.$$

- 1.3.1. On suppose que $n = 2m$, avec $m \in \mathbb{N}^*$, et on considère $k \in \{1, \dots, n\}$. Montrer que

$$\binom{n}{k-1} \leq \binom{n}{k} \iff k \leq m.$$

Quelle est, dans ce cas, la valeur de $\omega(n)$ en fonction de m ?

- 1.3.2. On suppose que $n = 2m + 1$, avec $m \in \mathbb{N}^*$, et on considère $k \in \{1, \dots, n\}$. Montrer que

$$\binom{n}{k-1} \leq \binom{n}{k} \iff k \leq m + 1.$$

Quelle est, dans ce cas, la valeur de $\omega(n)$ en fonction de m ?

- 1.3.3. Montrer que $\omega(2n) = 2\omega(2n-1)$.

2^{ème} Partie

Des familles vérifiant la propriété $\mathcal{S}$ et ayant 2 ou 3 éléments

Dans cette partie, E désigne un ensemble à n éléments.

- 2.1. Nombre de familles vérifiant la propriété $\mathcal{S}$ et ayant 2 éléments

- 2.1.1. Exprimer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$ en fonction de n . Justifiez votre réponse.

- 2.1.2. Combien existe-t-il de couples (A, B) formés de parties de E avec $A \subset B$. Justifiez votre réponse.

- 2.1.3. Combien existe-t-il de couples (A, B) formés de parties de E avec $B \subset A$ et $A \neq B$. Justifiez votre réponse.

- 2.1.4. En déduire le nombre de couples (A_1, A_2) , formés de parties de E et possédant la propriété $\mathcal{S}$.

- 2.2. Des familles vérifiant la propriété $\mathcal{S}$ et ayant 3 éléments

On suppose ici que $n \geq 5$. Combien existe-t-il de triplets (A_1, A_2, A_3) de parties de E avec $\text{card} A_1 = 1$, $\text{card} A_2 = 2$, $\text{card} A_3 = 3$ et possédant, de plus, la propriété $\mathcal{S}$?

On pourra remarquer que si (A_1, A_2, A_3) possède la propriété $\mathcal{S}$ avec $A_1 = \{x\}$ et $A_2 = \{y, z\}$ alors la partie A_3 est soit de la forme $A_3 = \{y, a, b\}$, avec $a \neq b$ et $a, b \in E \setminus \{x, y, z\}$, soit de la forme $A_3 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, avec α, β, γ des éléments distincts de $E \setminus \{x, y\}$.

3^{ème} Partie

**Détermination de la valeur maximale du nombre d'éléments
d'une famille vérifiant la propriété $\mathcal{S}$**

Pour toute la suite du problème, on considère un ensemble E à n éléments, un entier naturel $p \geq 2$ et une famille $(A_1, A_2, \dots, A_p)$ de parties de E possédant la propriété $\mathcal{S}$, puis on cherche la valeur maximale de p .

Définition : On appelle *chaîne* de parties de E toute famille $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ de parties de E vérifiant :

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{card } C_i = i, \\ \forall j \in \{1, 2, \dots, n-1\}, C_j \subset C_{j+1}. \end{cases}$$

3.1. Montrer que $p \leq 2^n - 2$.

3.2. Déterminer toutes les chaînes de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

3.3. On note s_n le nombre de chaînes d'un ensemble à n éléments.

3.3.1. Vérifier que si B est une partie, de cardinal $n-1$, de E et si $(B_1, \dots, B_{n-1})$ est une chaîne de B alors $(B_1, \dots, B_{n-1}, E)$ est une chaîne de E .

3.3.2. Établir que $s_n = ns_{n-1}$ puis justifier que $s_n = n!$.

3.4. On prend $A_1 = \{2\}$, $A_2 = \{1, 3\}$, $A_3 = \{1, 4\}$ trois parties de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$; la famille (A_1, A_2, A_3) possède donc la propriété $\mathcal{S}$.

Trouver une chaîne (D_1, D_2, D_3, D_4) de $\{1, 2, 3, 4\}$ telle que $\{A_1, A_2, A_3\} \cap \{D_1, D_2, D_3, D_4\} = \emptyset$ et une autre chaîne (C_1, C_2, C_3, C_4) telle que $\{A_1, A_2, A_3\} \cap \{C_1, C_2, C_3, C_4\} = \{A_2\}$.

3.5. Soit $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ une chaîne de E ; montrer que

$$\text{card}(\{A_1, A_2, \dots, A_p\} \cap \{C_1, C_2, \dots, C_n\}) \leq 1.$$

3.6. Détermination de la valeur maximale de p

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des chaînes $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ de E vérifiant :

$$\text{card}(\{A_1, A_2, \dots, A_p\} \cap \{C_1, C_2, \dots, C_n\}) = 1.$$

On définit alors l'application $\Phi : \mathcal{F} \rightarrow \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$ qui à toute chaîne $(C_1, C_2, \dots, C_n)$, élément de $\mathcal{F}$, associe l'unique élément de $\{A_1, A_2, \dots, A_p\} \cap \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$.

3.6.1. Soit $k \in \{1, \dots, p\}$; on pose $A_k = \{x_1, \dots, x_\ell\}$ et $E \setminus A_k = \{x_{\ell+1}, \dots, x_n\}$, ℓ étant le cardinal de A_k . Construire une chaîne $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ de E telle que $C_\ell = A_k$ et en déduire que l'application Φ est surjective.

3.6.2. Soit $k \in \{1, 2, \dots, p\}$. Montrer que le cardinal de $\Phi^{-1}(\{A_k\})$ est égal à $\ell!(n-\ell)!$, où ℓ désigne le cardinal de A_k .

3.6.3. Vérifier que les ensembles $\Phi^{-1}(\{A_1\})$, $\Phi^{-1}(\{A_2\})$, ..., $\Phi^{-1}(\{A_p\})$ forment une partition de $\mathcal{F}$.

3.6.4. On pose $n_k = \text{card } A_k$, $k \in \{1, \dots, p\}$. Exprimer le nombre d'éléments de $\mathcal{F}$ en fonction des cardinaux des ensembles $\Phi^{-1}(\{A_1\})$, $\Phi^{-1}(\{A_2\})$, ..., $\Phi^{-1}(\{A_p\})$, puis en déduire que $\sum_{k=1}^p n_k!(n-n_k)! \leq n!$.

3.6.5. On rappelle que $\omega(n) = \max_{0 \leq j \leq n} \binom{n}{j}$. Déduire de la question précédente que $p \leq \omega(n)$.

3.6.6. Existe-t-il une famille $(B_1, B_2, \dots, B_{\omega(n)})$ de parties de E possédant la propriété $\mathcal{S}$? Justifiez votre réponse.

3.6.7. Conclure au sujet de la valeur maximale de l'entier p .

3.7. Une application

Soit $E = \{1, 2, \dots, n\}$; on considère des nombres réels $a_1, a_2, \dots, a_n$, tous strictement positifs et non nécessairement distincts. On définit l'application $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$f(\emptyset) = 0; \quad \forall A \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}, \quad f(A) = \sum_{i \in A} a_i.$$

3.7.1. Vérifier que si A et B sont deux parties de E telles que $A \subset B$ et $A \neq B$, alors $f(A) < f(B)$.

3.7.2. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le nombre $g(t)$ de parties A de E telles que $f(A) = t$ est nécessairement inférieur à $\omega(n)$.



Problème 3

À propos de parties puissantes de l'intervalle $]0, +\infty[$

Notations et définitions

Dans ce problème, $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien et e le nombre de Néper. On rappelle que si α et β sont des réels strictement positifs, alors $\alpha^\beta = e^{\beta \ln(\alpha)}$.

Définitions :

- (i) Une partie finie non vide $\mathcal{C}$ de réels strictement positifs est dite *puissante* si $\mathcal{C}$ admet au moins deux éléments et, pour tout couple (a, b) d'éléments distincts de $\mathcal{C}$, l'un au moins des réels a^b et b^a appartient à $\mathcal{C}$; autrement dit, une partie finie $\mathcal{C}$ de l'intervalle $]0, +\infty[$ est *puissante* si elle vérifie

$$\begin{cases} \text{card } \mathcal{C} \geq 2, \\ \forall (a, b) \in \mathcal{C}^2, (a \neq b) \implies (a^b \in \mathcal{C} \text{ ou } b^a \in \mathcal{C}). \end{cases}$$

- (ii) Une partie puissante $\mathcal{C}$, de réels strictement positifs, telle que $1 \notin \mathcal{C}$ est dite *super-puissante*.

Le but du problème est d'étudier des parties puissantes à deux éléments, puis de montrer qu'il :

- n'existe qu'une seule partie super-puissante (resp. puissante) à trois (resp. quatre) éléments et la déterminer ;
- n'existe, pour $n \in \mathbb{N}$, aucune partie super-puissante (resp. puissante) à n éléments avec $n \geq 4$ (resp. $n \geq 5$).

1^{ère} Partie

Étude de quelques exemples

- 1.1. La partie $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$ est-elle puissante ?

- 1.2. Vérifier que dans chacun des cas suivants, $\mathcal{C}$ est une partie puissante de l'intervalle $]0, +\infty[$:

$$(i) \mathcal{C} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\}; \quad (ii) \mathcal{C} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}\}; \quad (iii) \mathcal{C} = \{1, \alpha\}, \text{ avec } 0 < \alpha \neq 1.$$

- 1.3. Reprendre la question précédente en précisant dans quels cas $\mathcal{C}$ est-elle une partie super-puissante.

- 1.4. Construire une partie puissante de l'intervalle $]0, +\infty[$ ayant quatre éléments.

- 1.5. Une condition nécessaire sur les parties puissantes à deux éléments

Soient α et β deux réels strictement positifs et distincts de 1, avec $\alpha < \beta$.

- 1.5.1. On suppose que $\alpha < 1 < \beta$. Montrer que la partie $\mathcal{C} = \{\alpha, \beta\}$ de l'intervalle $]0, +\infty[$ n'est pas puissante.

- 1.5.2. En déduire que si $\mathcal{C} = \{\alpha, \beta\}$ est une partie puissante de l'intervalle $]0, +\infty[$, alors $\alpha > 1$ ou bien $\beta < 1$.

- 1.6. Vérifier que $\{e^{\frac{1}{e}}, e\}$ est une partie super-puissante de l'intervalle $]0, +\infty[$.

- 1.7. Existe-t-il un réel $d > e$ tel que $\{e, d\}$ soit une partie puissante de l'intervalle $]0, +\infty[$?

2^{ème} Partie

Une infinité de parties super-puissantes à deux éléments

- 2.1. Soient $\alpha > 0$ et $\gamma > 0$. Montrer que $\gamma^\alpha > \gamma$ si, et seulement si, $(\alpha < 1 \text{ et } \gamma < 1)$ ou bien $(\alpha > 1 \text{ et } \gamma > 1)$.

- 2.2. Une infinité de parties super-puissantes, à deux éléments, contenues dans l'intervalle $]1, +\infty[$

Soit $\alpha \in]1, e^{\frac{1}{e}}[$. On considère la fonction $f_\alpha : x \mapsto \alpha^x - x$, définie sur l'intervalle $[\alpha, +\infty[$.

- 2.2.1. Montrer que la fonction f_α est dérivable sur l'intervalle $[\alpha, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

- 2.2.2. Montrer que la dérivée de f_α s'annule une seule fois sur l'intervalle $[\alpha, +\infty[$ en un point x_0 que l'on calculera en fonction de α . On pourra vérifier que $\alpha^\alpha \ln(\alpha) < 1$.

- 2.2.3. Déterminer le signe de $f_\alpha(x_0)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f_α sur $[\alpha, +\infty[$.

- 2.2.4. Montrer, en citant soigneusement les théorèmes utilisés, qu'il existe exactement deux réel β et β_1 vérifiant $\alpha < \beta < x_0 < \beta_1$, tels que chacune des parties $\{\alpha, \beta\}$ et $\{\alpha, \beta_1\}$ soit super-puissante.

- 2.3. Une infinité de parties super-puissantes, à deux éléments, contenues dans l'intervalle $]0, 1[$

Soit $\alpha \in]0, 1[$.

- 2.3.1. Justifier que si $\gamma \in]\alpha, 1[$, alors $\gamma^\alpha \notin \{\alpha, \gamma\}$.

- 2.3.2. Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in]\alpha, 1[$ tel que la partie $\{\alpha, \lambda\}$ soit super-puissante.

On pourra étudier la fonction $g_\alpha : x \mapsto \alpha^x - x$, définie sur le segment $[\alpha, 1]$.

3^{ème} Partie
Établissement des résultats annoncés

3.1. Soit $\mathcal{C} = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ une partie puissante de réels strictement positifs à m éléments, avec $m \geq 3$. On suppose que $1 \in \mathcal{C}$ et on pose $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \setminus \{1\}$.

Montrer que $\mathcal{C}'$ est une partie super-puissante formée de $(m - 1)$ réels strictement positifs.

3.2. Un premier résultat important

Soit $\mathcal{C} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ une partie super-puissante à n éléments > 0 , avec $n \geq 3$; on ordonne les éléments de $\mathcal{C}$ comme suit

$$a_1 > a_2 > \dots > a_n.$$

3.2.1. On suppose qu'il existe $k \in \{1, \dots, n-1\}$ tel que $a_1 > \dots > a_k > 1 > a_{k+1} > \dots > a_n$. Montrer que $a_n^{a_k} < a_n$ et que $1 < a_k^{a_n} < a_k$, puis aboutir à une contradiction.

3.2.2. En déduire que $\mathcal{C} \subset]0, 1[$ ou $\mathcal{C} \subset]1, +\infty[$.

3.2.3. Montrer que, pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$, on a $a_i^{a_j} > a_i$.

3.3. Un deuxième résultat important

Soit $n \geq 3$ et soit $\mathcal{C} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ une partie super-puissante à n éléments > 0 tels que $a_1 > a_2 > \dots > a_n$. Pour tout $p \in \{2, \dots, n\}$, on pose $\mathcal{C}_p = \{a_1, \dots, a_p\}$.

3.3.1. Montrer que $\mathcal{C}_{n-1} = \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ est une partie super-puissante.

3.3.2. Montrer que, pour tout $p \in \{2, \dots, n-1\}$, $\mathcal{C}_p$ est une partie super-puissante.

3.4. Détermination de l'unique partie super-puissante à trois éléments

Soit $\mathcal{C} = \{a_1, a_2, a_3\}$ une partie super-puissante à trois éléments, > 0 et vérifiant $a_1 > a_2 > a_3$.

3.4.1. Montrer que $a_2^{a_1} = a_1$.

3.4.2. Montrer que $a_3^{a_1} \in \{a_1, a_2\}$ puis justifier que $a_3^{a_1} = a_2$.

3.4.3. Montrer que $a_3^{a_2} \in \{a_1, a_2\}$ puis en déduire que $a_3^{a_2} = a_1$.

3.4.4. Montrer que $a_1^2 = a_2$ puis en déduire que $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{4}$ et $a_3 = \frac{1}{16}$.

3.5. Il n'existe pas de partie super-puissante à quatre éléments

Soit $\mathcal{C} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ une partie super-puissante à 4 éléments, > 0 et vérifiant $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$.

3.5.1. Montrer que $a_4^{a_1} = a_3$.

3.5.2. En déduire que $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{16}$ et $a_4 = \frac{1}{256}$.

3.5.3. Trouver une contradiction puis conclure qu'il n'existe aucune partie super-puissante à quatre éléments.

3.6. Montrer qu'il n'existe aucune partie super-puissante à n éléments, avec $n \geq 4$.

3.7. Déterminer toutes les parties puissantes à n éléments, avec $n \geq 4$.

3.8. Combien d'éléments une partie puissante peut-elle avoir ?

FIN DU SUJET