



Juillet 2021

Sujet de Mathématiques

Durée : 4h

Le sujet de l'épreuve de mathématiques du concours général des sciences et techniques, session 2021, est composé d'un problème formé de cinq parties.

Pour répondre à une question donnée du sujet, tout candidat peut admettre et utiliser le résultat des questions qui la précèdent, même s'il ne les a pas traitées, à condition d'indiquer avec précision les références des questions utilisées.

Il est à noter que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de mentionner avec précision les références des questions abordées.

L'usage de tout document ou matériel électronique est interdit

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Problème :

Polynômes de Tchebychev de première espèce et applications

Notation, définitions et rappels :

1. On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ celui des entiers relatifs, $\mathbb{R}$ celui des nombres réels et $\mathbb{C}$ celui des complexes.
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note $\Re(z)$ (resp. $\Im(z)$) la partie réelle (resp. imaginaire) du complexe z , et $|z|$ (resp. $\bar{z}$) son module (resp. son conjugué), on rappelle que $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(\Re(z))^2 + (\Im(z))^2}$ et que, pour tout couple u et v de complexes, on a :

$$||u| - |v|| \leq |u - v| \leq |u| + |v|$$

Pour tout réel θ , on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe définie par $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

3. Pour tout $(r, k) \in \mathbb{N}^2$, avec $k \leq r$, on note $\binom{r}{k}$ le coefficient binomial défini par $\binom{r}{k} = \frac{r!}{k!(r-k)!}$.

4. Fonctions polynômes :

– On rappelle qu'une fonction polynôme non nulle, de degré $n \in \mathbb{N}$, est une fonction définie sur $\mathbb{C}$ de la forme

$P : z \mapsto P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, où $a_0, \dots, a_{n-1}$ sont des nombres complexes et a_n est un nombre complexe non nul, nommé coefficient dominant de P . Si, de plus $a_n = 1$, la fonction polynôme P est dite normalisée ou unitaire.

– Si les coefficients de P sont tous réels, l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ est une fonction réelle de la variable réelle, noté encore P .

– On appelle racine de P tout nombre complexe z_0 tel que $P(z_0) = 0$. Si z_0 est une racine de P , on appelle ordre de multiplicité de z_0 le plus grand entier $m \geq 1$ pour lequel il existe une fonction polynôme Q telle que $Q(z_0) \neq 0$ et

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - z_0)^m Q(z)$$

– On appelle fonction polynôme dérivée de P la fonction polynôme notée P' et définie par :

$$P' : z \mapsto P'(z) = na_n z^{n-1} + (n-1)a_{n-1} z^{n-2} + \dots + 2a_2 z + a_1 = \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1}$$

Si $n \geq 1$ et P' est la fonction nulle si $n = 0$.



- Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction polynôme *dérivée d'ordre k* de la fonction polynôme P , notée $P^{(k)}$, par $P^{(0)} = P$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P^{(k)} = (P^{(k-1)})'$.
- On rappelle et on admet que si P et Q sont deux fonctions polynômes, alors :

$$(P + Q)' = P' + Q', \quad (PQ)' = P'Q + PQ' \quad \text{et} \quad (P^r)' = rP'P^{r-1}, \quad r \in \mathbb{N}^*$$

- Si P est une fonction polynôme, on pose $\|P\| = \sup_{x \in [-1, 1]} |P(x)|$. Cette borne supérieure est bien définie puisque $\{|P(x)| : x \in [-1, 1]\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des fonctions polynômes de **degré n et unitaires** (ie. de coefficient dominant égal à 1).

5. Résultats admis sur les fonctions polynômes :

- **Théorème fondamental de l'algèbre (D'Alembert-Gauss)** : Toute fonction polynôme de degré $n \geq 1$ admet n racines complexes comptées avec leur ordre de multiplicité, autrement dit, il existe $(a_n, r) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{N}^*$, des complexes $z_1, \dots, z_r$ et des entiers naturels non nuls $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = a_n \prod_{k=1}^r (z - z_k)^{\alpha_k}$$

- On en déduit que, pour toute fonction polynôme non nulle, le nombre de zéros, comptés avec leur ordre de multiplicité, est égal à son degré. En particulier, une fonction polynôme ayant une infinité de racines est nulle.

6. Polynômes trigonométriques :

- On appelle *polynôme trigonométrique* toute application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ pour laquelle il existe $N \in \mathbb{N}$ et des complexes $c_{-N}, \dots, c_0, \dots, c_N$ tels que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ik\theta}$$

Lorsque f n'est pas le polynôme trigonométrique nul, on supposera que $(c_{-N}, c_N) \neq (0, 0)$.

- Si a et b sont deux réels tels que $a < b$, on définit les intégrales suivantes :

$$\int_a^b e^{ik\theta} d\theta := \int_a^b \cos(k\theta) d\theta + i \int_a^b \sin(k\theta) d\theta \quad \text{et} \quad \int_a^b f(\theta) d\theta := \sum_{k=-N}^N c_k \int_a^b e^{ik\theta} d\theta$$

On vérifie que la fonction $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \theta \mapsto \overline{f(\theta)}$ est aussi un polynôme trigonométrique et que :

$$\int_a^b \bar{f}(\theta) d\theta = \int_a^b \overline{f(\theta)} d\theta = \overline{\int_a^b f(\theta) d\theta}$$

L'objectif de ce problème est d'étudier quelques propriétés des fonctions polynômes de Tchebychev, de première espèce, et de déterminer la borne inférieure :

$$\inf \{ \|P\|, P \in \mathbb{U}_n \}$$

Ainsi que l'unique fonction polynôme de $\mathbb{U}_n$ réalisant cette borne inférieure.

Partie 1 :

Premières propriétés des fonctions polynômes de Tchebychev

On considère la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynômes définies par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, T_0(z) = 1, T_1(z) = z \quad \text{et} \quad T_{n+1}(z) = 2zT_n(z) - T_{n-1}(z), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

1.1. Préciser les expressions des fonctions polynômes T_2, T_3, T_4 et T_5 .

1.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

1.2.1. Montrer que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta) \quad (1)$$

1.2.2. Montrer que T_n est l'unique fonction polynôme à coefficients réels vérifiant la relation (1).

1.3. Degré, coefficients et parité de T_n , $n \in \mathbb{N}$:

1.3.1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction polynôme T_n est à coefficients entiers.

1.3.2. Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré de T_n ainsi que son coefficient dominant.

1.3.3. Soit $n \in \mathbb{N}$, préciser la parité de T_n en fonction de celle de n .

1.4. Une expression de la fonction polynôme T_n pour $n \geq 2$:

Soit n un entier naturel ≥ 2 .

1.4.1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer la partie réelle du complexe $(\cos \theta + i \sin \theta)^n$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

1.4.2. Montrer que, pour tout réel θ :

$$T_n(\cos \theta) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k} (\cos \theta)^{n-2k} (\sin \theta)^{2k}$$

On pourra utiliser la formule de Moivre.

1.4.3. En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $T_n(z) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k} z^{n-2k} (1-z^2)^k$

1.4.4. Retrouver les résultats de la question **1.3.** précédente.

1.5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

1.5.1. En utilisant la formule d'Euler, montrer que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos^{2n} \theta = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{p=1}^n \binom{2n}{n-p} \cos(2p\theta)$$

1.5.2. En déduire, que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^{2n} = \sum_{k=0}^n b_k T_{2k}(z)$, où les nombres $b_0, \dots, b_n$ sont des rationnels dont on précisera les valeurs en fonction de n .

1.6. Expression des coefficients de la fonction polynôme T_n pour $n \geq 2$:

Soit n un entier naturel ≥ 2 .

1.6.1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0$$

1.6.2. On pose $T_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} x^k$, $x \in \mathbb{R}$.

(i) Pour tout $k \in \{0, \dots, n-2\}$, exprimer $a_{n,k+2}$ en fonction de $a_{n,k}$.

(ii) En déduire, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, l'expression de $a_{n,k}$ en fonction de n et k .

On pourra distinguer les cas selon la parité des entiers n et k .

1.7. Une autre propriété de la fonction polynôme T_n pour $n \in \mathbb{N}^*$:

On note $\cosh$ et $\sinh$ les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1.7.1. Vérifier que les fonctions $\cosh$ et $\sinh$ sont respectivement paire et impaire.

1.7.2. Justifier que les fonctions $\cosh$ et $\sinh$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\cosh' = \sinh$ et $\sinh' = \cosh$.

1.7.3. Dresser le tableau de variations de $\cosh$ et en étudier les branches infinies puis tracer son graphe.

1.7.4. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cosh(x) \geq 1$ et que $\cosh(x) = 1$ si, et seulement si, $x = 0$.

1.7.5. Justifier que la fonction $\cosh$ réalise une bijection de l'intervalle $[0, +\infty[$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

1.7.6. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\cosh(x+y) + \cosh(x-y) = 2 \cosh(x) \cosh(y) \quad \text{et que} \quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

1.7.7. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \cosh((n+1)\theta) + \cosh((n-1)\theta) = 2 \cosh(n\theta) \cosh(\theta)$$

1.7.8. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cosh(\theta)) = \cosh(n\theta) \quad (2)$$

1.7.9. Montrer alors que si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$ et $|x| > 1$ alors $|T_n(x)| > 1$.

1.7.10. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, avec $x > 1$, exprimer en fonction de n , de x et de $\sqrt{x^2 - 1}$.

Partie 2 :

Application à la résolution de l'équation $\cos(r\pi) = s$
d'inconnues $r, s \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$

Dans cette partie, on cherche les rationnels non entiers r et s tels que $\cos(r\pi) = s$, on pose alors $r = \frac{m}{n}$ et $s = \frac{p}{q}$ avec $(p, m) \in (\mathbb{Z})^2, (q, n) \in \mathbb{N}^2, n \geq 2, q \geq 2$ et $p \wedge q = m \wedge n = 1$.

2.1. Montrer que $T_n\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^m$.

2.2. Montrer que l'entier q divise 2^{n-1} . On remarquera que le polynôme T_n est à coefficients entiers.

2.3. En déduire qu'il existe $e \in \{1, \dots, n-1\}$ tel que $q = 2^e$. Que peut-on alors dire de la parité de l'entier p ?

2.4. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $e_k \in \{1, \dots, n-1\}$ et un entier naturel impair p_k tels que : $\cos(2^k r\pi) = \frac{p_k}{2^{e_k}}$.

2.5. Exprimer e_{k+1} en fonction de e_k , pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis en déduire l'expression de e_k en fonction de e et k .

2.6. Montrer alors que $e = 1$ et $p = \pm 1$, puis donner les valeurs possibles des rationnels s et r .

Partie 3 :

Zéros, extrémums et une autre propriété remarquable de T_n
Application à la déterminer la borne inférieure $\inf\{\|P\|, P \in \mathbb{U}_n\}$

Dans cette partie, on suppose que n est un entier naturel ≥ 2 .

3.1. Zéros de la fonction polynôme T_n :

3.1.1. Résoudre l'équation $\cos(n\theta) = 0$, d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.

3.1.2. Montrer que la fonction polynôme T_n possède exactement n racines réelles $x_1, x_2, \dots, x_n$ avec $x_1 > x_2 > \dots > x_n$, et calculer x_k pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.

3.2. Extrémums de la fonction polynôme T_n sur le segment $[-1, 1]$:

3.2.1. Montrer que si $x \in [-1, 1]$, alors $|T_n(x)| \leq 1$.

3.2.2. Montrer que toute racine réelle de l'équation $|T_n(x)| = 1$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, est dans le segment $[-1, 1]$.

3.2.3. Résoudre l'équation $|\cos(n\theta)| = 1$, d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.

3.2.4. En déduire que l'équation $|T_n(x)| = 1$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, possède exactement $n+1$ solutions réelles $y_0, y_1, \dots, y_n$ avec $y_0 > y_1 > \dots > y_n$ et calculer y_k et $T_n(y_k)$ pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. On pourra utiliser (1).

On a en particulier prouvé que $\|T_n\| := \sup_{-1 \leq x \leq 1} |T_n(x)| = 1$.

3.3. Résoudre l'équation $T'_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

3.4. Représenter graphiquement les fonctions $x \mapsto T_k(x)$, sur le segment $[-1, 1]$, pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

3.5. Soit P une fonction polynôme à **coefficients réels, de degré n et de coefficient dominant égal à 2^{n-1}** .

On cherche à montrer que $\|P\| := \sup_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)| \geq 1$. Raisonnant par l'absurde, on suppose $\|P\| < 1$, ainsi pour tout $x \in [-1, 1]$, $|P(x)| < 1$.

3.5.1. En considérant le signe de la quantité $T_n(x) - P(x)$ pour $x \in \{y_0, \dots, y_n\}$, montrer que la fonction polynôme $T_n - P$ s'annule sur chacun des intervalles $]y_k, y_{k-1}[$, $1 \leq k \leq n$.

3.5.2. En déduire une contradiction en considérant le degré de la fonction polynôme $T_n - P$.

3.6. Déterminer la borne inférieure $\inf\{\|P\|, P \in \mathbb{U}_n\}$:

3.6.1. Soit $P \in \mathbb{U}_n$, c'est-à-dire que P est une fonction polynôme de **degré n et unitaire**.

(i) On suppose que la fonction polynôme P est à coefficients réels. Montrer que $\|P\| := \sup_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$.

(ii) Dans le cas général, montrer de même que $|P| = \sup_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$.

On pourra séparer partie réelle et partie imaginaire de $P(x)$ pour $x \in [-1, 1]$.

3.6.2. Montrer que $\inf\{\|P\|, P \in \mathbb{U}_n\}$ existe et en considérant un élément bien choisi de $\mathbb{U}_n$, justifier que :

$$\inf\{\|P\|, P \in \mathbb{U}_n\} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Partie 4 :

Étude des polynômes trigonométriques

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ un polynôme trigonométrique défini par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ik\theta}$$

4.1. Unicité de l'écriture d'un polynôme trigonométrique et application :

4.1.1. Soit $m \in \mathbb{Z}$, calculer les intégrales $\int_0^{2\pi} e^{im\theta} d\theta$ et $\int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-im\theta} d\theta$.

4.1.2. En déduire l'unicité de l'écriture d'un polynôme trigonométrique.

4.1.3. Montrer que f est à valeurs réelles si, et seulement si, pour tout $k \in \{0, \dots, N\}$, $c_{-k} = \overline{c_k}$.

4.2. Line entre fonction polynôme et polynôme trigonométrique :

On suppose ici que le polynôme trigonométrique f est **non nul**, ce qui veut dire que $(c_{-N}, c_N) \neq (0, 0)$.

4.2.1. Montrer qu'il existe une unique fonction polynôme P telle que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta) = e^{-iN\theta} P(e^{i\theta})$$

Et calculer les coefficients $a_0, a_1, \dots$ de P en fonction de $c_{-N}, \dots, c_0, \dots, c_N$.

4.2.2. Préciser le degré de P lorsque $c_N \neq 0$.

4.3. Étude des polynômes trigonométriques à valeurs réelles :

On suppose ici que le polynôme trigonométrique f est **non nul**, ce qui veut dire que $(c_{-N}, c_N) \neq (0, 0)$, et qu'il

est de plus à **valeurs réelles**. On note $P : z \mapsto P(z) = \sum_{k=0}^{2N} a_k z^k$ l'unique fonction polynôme telle que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta) = e^{-iN\theta} P(e^{i\theta})$$

4.3.1. Montrer que $P(0) \neq 0$ et vérifier que, pour tout $k \in \{0, \dots, 2N\}$, $a_{2N-k} = \overline{a_k}$.

4.3.2. On note $\bar{P}$ la fonction polynôme $\bar{P} : z \mapsto \bar{P}(z) = \sum_{k=0}^{2N} \overline{a_k} z^k$. Vérifier que :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, P(z) = z^{2N} \bar{P}(1/z)$$

4.3.3. Montrer que si $z_0 \in \mathbb{C}$ est une racine de P d'ordre de multiplicité $m \geq 1$, alors $z_0 \neq 0$ et $\frac{1}{z_0}$ est aussi racine de P d'ordre de multiplicité m .

4.3.4. Soit $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $e^{i\theta_0}$ soit une racine de P d'ordre de multiplicité $m \geq 1$. On note $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction polynôme telle que $Q(e^{i\theta_0}) \neq 0$ et :

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - e^{i\theta_0})^m Q(z)$$

(i) Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, qu'on exprimera à l'aide de Q , telle que $g(\theta_0) \neq 0$ et que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta) = \left(\sin \left(\frac{\theta - \theta_0}{2} \right) \right)^m g(\theta)$$

(ii) Montrer que si f est de plus à valeurs réelles positives, alors m est pair.

4.4. Étude des polynômes trigonométriques à valeurs réelles positives :

On suppose ici que le polynôme trigonométrique f est non nul et qu'il est de plus à **valeurs réelles positives**.

On note $P : z \mapsto P(z) = \sum_{k=0}^{2N} a_k z^k$ l'unique fonction polynôme telle que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta) = e^{-iN\theta} P(e^{i\theta})$$

4.4.1. Montrer que l'on peut factoriser sous la forme :

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = a P_1(z) P_2(z)$$

Où $a \in \mathbb{C}^*$ et P_1, P_2 sont des fonctions polynômes vérifiant les propriétés (i) et (ii) suivantes :

(i) $P_1 = 1$ ou $P_1(z) = \prod_{k=1}^p (z - e^{i\theta_k})^{2\alpha_k}$, où $p \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{N}^*$ et $\theta_1, \dots, \theta_p \in [0, 2\pi[$ deux à deux distincts.

(ii) $P_2 = 1$ ou $P_2(z) = \prod_{k=1}^q ((z - z_k)(z - 1/\overline{z_k}))^{\beta_k}$, où $\beta_1, \dots, \beta_q \in \mathbb{N}^*$ et $z_1, \dots, z_q$ des complexes deux à deux distincts et de modules < 1 .

Que vaut la somme $\sum_{k=1}^p \alpha_k + \sum_{k=1}^q \beta_k$ en fonction de N ?

4.4.2. En déduire qu'il existe une fonction polynôme R , de degré N telle que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad f(\theta) = |R(e^{i\theta})|^2$$

On pourra remarquer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout k ,

$$(e^{i\theta} - z_k)(e^{i\theta} - 1/\overline{z_k}) = -\frac{e^{i\theta}}{z_k} |e^{i\theta} - z_k|^2 \quad \text{et} \quad (e^{i\theta} - e^{i\theta_k})^2 = -e^{i\theta} e^{i\theta_k} |e^{i\theta} - e^{i\theta_k}|^2$$

Partie 5 :

Application à la détermination de l'unique fonction polynôme de $\mathbb{U}_n$ réalisant la borne inférieure en question

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ un polynôme trigonométrique défini par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad f(\theta) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ik\theta}$$

On suppose que f est **non nul** et qu'il est à **valeurs réelles positives**.

5.1. Montrer qu'il existe un unique $(a_0, a_1, b_1, \dots, a_N, b_N) \in \mathbb{R}^{2N+1}$, qu'on exprimera en fonction des c_k , tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad f(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta))$$

5.2. D'après la question **4.4.2** ci-dessus, on peut considérer une fonction polynôme R , de degré N , telle que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad f(\theta) = |R(e^{i\theta})|^2$$

On note $\alpha_0, \dots, \alpha_N$ les coefficients de la fonction polynôme R , avec $\alpha_N \neq 0$.

5.2.1. Vérifier que, pour tout réel θ , $f(\theta) = \sum_{0 \leq k, j \leq N} \overline{\alpha_j} \alpha_k e^{i(k-j)\theta}$ et en déduire que :

$$a_N - ib_N = 2\overline{\alpha_0} \alpha_N \quad \text{et} \quad a_0 = \sum_{k=0}^N |\alpha_k|^2$$

5.2.2. En déduire que $a_N^2 + b_N^2 \leq a_0^2$.

5.3. Étude d'un cas particulier

On reprend les notations précédentes et on suppose que $\alpha_0 = \alpha_N = 1$. On pose $M(R) = \sup \{|R(e^{i\theta})| \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.

5.2.1. Que deviennent les relations trouvées à la section **5.2.** précédente ?

5.2.2. En utilisant une intégration, montrer que $M(R)^2 \geq a_0$.

5.2.3. En appliquant les résultats de la section **5.2.** à la fonction $g : \theta \mapsto M(R)^2 - f(\theta)$, montrer que $M(R) \geq 2$, avec égalité si, et seulement si, $\alpha_1 = \dots = \alpha_{N-1} = 0$.

5.4. Établissement du résultat annoncé :

Soit n un entier ≥ 2 et soit $Q \in \mathbb{U}_n$ tel que $\|Q\| = \frac{1}{2^{n-1}}$. On note Q_1 la fonction polynôme définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad Q_1(z) = 2^n z^n Q\left(\frac{1}{2}(z + 1/z)\right) \quad (3)$$



- 5.4.1. Justifier que l'expression (3) définit bien la fonction polynôme Q_1 .
5.4.2. Préciser le degré de Q_1 , son terme constant et son terme de plus haut degré.
5.4.3. Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $2 \cos \theta = z + 1/2$. Montrer que :

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad 2 \cos(m\theta) = z^m + \frac{1}{z^m}$$

- 5.4.4. Calculer $M(Q_1)$ et en déduire que $Q_1(z) = z^{2^n} + 1$, pour tout $z \in \mathbb{C}$.
5.4.5. Montrer que $2^{n-1}Q = T_n$.

Fin du sujet