



المملكة المغربية
الجمهورية العربية السورية
وزارة التربية والتعليم
والتعليم العالي والبحث العلمي
المركز الوطني للتقنية
العلمية والبحث العلمي



المملكة المغربية
الجمهورية العربية السورية
وزارة التربية والتعليم
والتعليم العالي والبحث العلمي
المركز الوطني للتقنية
العلمية والبحث العلمي

Juillet 2020

Sujet de Mathématiques

Durée: 4 h

Le sujet de l'épreuve de mathématiques du concours général des sciences et techniques, session 2020, est composé d'un problème formé de quatre parties largement indépendantes à l'exception des troisième et quatrième parties qui font appel à quelques résultats de la deuxième.

Pour répondre à une question donnée de ce problème, tout candidat peut admettre et utiliser les résultats des questions qui la précèdent, même s'il ne les a pas traités, à condition d'indiquer avec précision les références des questions utilisées.

Il est à noter que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de mentionner avec précision les références des questions abordées.

L'usage de tout document ou matériel électronique est interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Étude des parties confinées par doublement d'angle

Définitions et notations

- On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ celui des entiers relatifs, $\mathbb{R}$ celui des nombres réels et $\mathbb{C}$ celui des nombres complexes ; si $a \in \mathbb{R}$, on note $a\mathbb{Z}$ l'ensemble défini par $a\mathbb{Z} = \{ka : k \in \mathbb{Z}\}$.
- Si n et k sont deux entiers naturels non nuls, on note $n \wedge k$ le plus grand commun diviseur de n et de k (dit aussi p.g.c.d. de n et k). On note φ la fonction indicatrice d'Euler* et on rappelle que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(m)$ est le nombre d'éléments $q \in \{1, \dots, m\}$ tels que $m \wedge q = 1$.
- Si $z \in \mathbb{C}$, $|z|$ désigne le module de z . Si $x \in \mathbb{R}$, on note $|x|$ la valeur absolue de x et $[x]$ la partie entière de x ; $[x]$ est l'unique entier relatif n vérifiant $n \leq x < n + 1$ et on rappelle que $[x + k] = [x] + k$ pour tout entier relatif k .
- Notation modulo un réel**
 - ✓ Si $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $x \bmod a$ l'unique réel $r \in [0, a[$ tel que $x - r \in a\mathbb{Z}$. On notera que si x et a sont entiers, alors $x \bmod a$ est exactement le reste de la division euclidienne de x par a .
 - ✓ Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$, on note $A \bmod 2$ la partie de l'intervalle $[0, 2[$ définie par :

$$A \bmod 2 = \{x \bmod 2 : x \in A\}.$$

5. Vocabulaire géométrique

On pose $\Gamma = [0, 2[$ et on identifie Γ avec le cercle unité, $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ de $\mathbb{C}$, à l'aide de la bijection $\psi : \Gamma \rightarrow \mathcal{U}, t \mapsto e^{i\pi t}$; ce qui autorise l'usage du vocabulaire géométrique suivant :

- ✓ Si $0 \leq x < y < 2$, les deux arcs fermés de Γ d'extrémités x et y sont $[x, y]$, de longueur $y - x$, et la réunion $[0, x] \cup [y, 2[= [y, 2 + x] \bmod 2$, de longueur $2 + x - y$.
- ✓ Si $x \in \Gamma$, le demi-cercle fermé d'origine x est l'arc $[x, x + 1] \bmod 2$; le point de Γ diamétralement opposé à x est $(x + 1) \bmod 2$.

*. Euler, mathématicien et physicien suisse (1707-1783)



6. Application doublement d'angle; orbite

On définit l'application *doublement d'angle* $\sigma : \Gamma \rightarrow \Gamma$, $x \mapsto (2x) \bmod 2$. Ainsi :

$$\forall x \in \Gamma, \sigma(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, 1[, \\ 2x - 2 & \text{si } x \in [1, 2[. \end{cases}$$

L'application σ se traduit dans le cercle unité $\mathcal{U}$ comme l'*élévation au carré*, c'est à dire l'application $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$, $z \mapsto z^2$, qui n'est autre que le doublement de l'argument de z , son angle polaire dans Γ .

✓ On pose $\sigma^0 = id_\Gamma$, $\sigma^1 = \sigma$ et $\sigma^n = \underbrace{\sigma \circ \dots \circ \sigma}_{n \text{ fois}}$ pour tout entier naturel $n \geq 2$. Ainsi, on a :

$$\forall x \in \Gamma, \sigma^0(x) = x, \sigma^1(x) = \sigma(x), \sigma^2(x) = \sigma \circ \sigma(x) = \sigma(\sigma(x)), \sigma^3(x) = \sigma \circ \sigma \circ \sigma(x) = \sigma(\sigma(\sigma(x))) \dots$$

✓ Si $x \in \Gamma$, on définit l'*orbite* de x sous σ , notée $\mathcal{O}(x)$, par :

$$\mathcal{O}(x) = \{\sigma^n(x) ; n \in \mathbb{N}\} = \{x, \sigma(x), \sigma^2(x), \dots\}.$$

S'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^r(x) = x$, alors $\mathcal{O}(x)$ est finie de cardinal $p = \min\{m \in \mathbb{N}^* ; \sigma^m(x) = x\}$ et dans ce cas, on dit que $\mathcal{O}(x)$ est une *orbite périodique d'ordre p* .

7. Partie confinée de Γ

Une partie non vide A de Γ est dite *confinée* si :

(i) A est *stable* par σ , c'est à dire $\sigma(A) \subset A$;

(ii) A est *contractée*, c'est à dire qu'il existe un arc fermé, de Γ , de longueur < 1 et contenant A .

8. Si k et n sont deux entiers naturels tels que $n \geq 2$ et $1 \leq k \leq n-1$, on considère le système linéaire $S(n, k)$, de n équations linéaires à n inconnues réelles $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$, suivant :

$$S(n, k) : \begin{cases} 2x_0 - 2 & = & x_{n-k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2x_{k-1} - 2 & = & x_{n-1} \\ 2x_k & = & x_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2x_{n-1} & = & x_{n-1-k} \end{cases}$$

qu'on peut abrégé en écrivant :

$$S(n, k) : \begin{cases} 2x_i - 2 = x_{n-(k-i)} & \text{si } i \in \{0, \dots, k-1\}, \\ 2x_i = x_{i-k} & \text{si } i \in \{k, \dots, n-1\}. \end{cases}$$

L'objectif de ce problème est de réaliser l'étude des parties de Γ stables par l'application doublement d'angle et contenues dans un arc fermé de cercle, de longueur < 1 (parties confinées de Γ) et de les dénombrer. Cette étude fait appel aux systèmes du type $S(n, k)$ ainsi qu'à des techniques de l'analyse.

1^{ère} Partie

Étude du système $S(n, k)$ dans cinq cas particuliers Premiers exemples d'orbites périodiques confinées

1.1. Étude du système $S(3, 1)$

1.1.1. Écrire le système $S(3, 1)$ et montrer qu'il admet une unique solution, notée $(x_0^{(3,1)}, x_1^{(3,1)}, x_2^{(3,1)})$, à préciser.

1.1.2. Vérifier que $0 < x_2^{(3,1)} < x_1^{(3,1)} < 1 < x_0^{(3,1)} < 2$.



- 2.2.3. Montrer que $x_0^{(n,k)} < 2$.
 2.2.4. Montrer que $x_k^{(n,k)} < 1$.
 2.3. Étude du cas où $n \wedge k = d \geq 2$.
 On suppose ici que $n \wedge k = d \geq 2$.
 2.3.1. Soient $i \in \{0, \dots, d-1\}$ et $s \in \{0, \dots, k-1\}$; on pose $r_s = (ns) \bmod k$. Montrer que

$$0 \leq i + r_s \leq k-1.$$

- 2.3.2. En déduire que $x_0^{(n,k)} = x_1^{(n,k)} = \dots = x_{d-1}^{(n,k)}$.
 2.4. Existence d'une solution du système $S(n, k)$.
 2.4.1. Montrer que, pour tout $i \in \{k, \dots, n-1\}$, $2x_i^{(n,k)} = x_{i-k}^{(n,k)}$.
 2.4.2. Montrer que, pour tout $i \in \{0, \dots, k-1\}$, $2x_i^{(n,k)} = 2 + x_{n+i-k}^{(n,k)}$.
 On pourra justifier que $\lfloor \frac{i-k}{k} \rfloor = -1$ et $\lfloor \frac{nk+i-k}{k} \rfloor = n-1$ puis utiliser une réindexation.
 2.4.3. Que dire de $(x_0^{(n,k)}, x_1^{(n,k)}, \dots, x_{n-1}^{(n,k)})$ vis-à-vis du système $S(n, k)$?
 2.5. Unicité de la solution du système $S(n, k)$

On considère le système linéaire homogène $H(n, k)$, de n équations linéaires à n inconnues réelles $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$, suivant :

$$H(n, k) : \begin{cases} 2z_i = z_{n-(k-i)} & \text{si } i \in \{0, \dots, k-1\}, \\ 2z_i = z_{i-k} & \text{si } i \in \{k, \dots, n-1\}. \end{cases}$$

- 2.5.1. Vérifier que le système $H(n, k)$ se traduit par les n équations $2z_i = z_{(i-k) \bmod n}$, $0 \leq i \leq n-1$.
 2.5.2. Soit $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Vérifier que $4z_i = z_{(i-2k) \bmod n}$ et montrer plus généralement que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad 2^m z_i = z_{(i-mk) \bmod n}.$$

- 2.5.3. Résoudre le système $H(n, k)$.
 2.5.4. Conclure quant à l'unicité de la solution du système $S(n, k)$.

3^{ème} Partie

Construction d'orbites périodiques confinées de Γ Étude du cas général

Soient n et k deux entiers naturels tels que $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n-1$ et que $n \wedge k = 1$. On reprend les notations de la partie précédente et on pose

$$x_i^{(n,k)} = \frac{1}{1-2^{-n}} \sum_{s=0}^{k-1} 2^{-\lfloor \frac{ns+i}{k} \rfloor}, \quad i \in \{0, \dots, n-1\}.$$

On cherche ici à établir d'autres propriétés remarquables des $x_i^{(n,k)}$, $0 \leq i \leq n-1$. Il est évident que ces réels sont strictement positifs.

Remarque : Le cas $k = 1$ étant déjà étudié dans la section 1.4. de la première partie, on peut supposer ici que $k \geq 2$, donc $n \geq 3$.

- 3.1. Calcul de $\ell = x_0^{(n,k)} - x_{n-1}^{(n,k)}$

- 3.1.1. Montrer que, pour tout $s \in \{1, \dots, k-1\}$, $\lfloor \frac{ns}{k} \rfloor = \lfloor \frac{ns-1}{k} \rfloor$.

On pourra effectuer la division euclidienne de ns par k .

- 3.1.2. En déduire que $\ell = \frac{2^n - 2}{2^n - 1}$.



2.2.3. Montrer que $x_0^{(n,k)} < 2$.

2.2.4. Montrer que $x_k^{(n,k)} < 1$.

2.3. Étude du cas où $n \wedge k = d \geq 2$

On suppose ici que $n \wedge k = d \geq 2$.

2.3.1. Soient $i \in \{0, \dots, d-1\}$ et $s \in \{0, \dots, k-1\}$; on pose $r_s = (ns) \bmod k$. Montrer que

$$0 \leq i + r_s \leq k-1.$$

2.3.2. En déduire que $x_0^{(n,k)} = x_1^{(n,k)} = \dots = x_{d-1}^{(n,k)}$.

2.4. Existence d'une solution du système $S(n, k)$

2.4.1. Montrer que, pour tout $i \in \{k, \dots, n-1\}$, $2x_i^{(n,k)} = x_{i-k}^{(n,k)}$.

2.4.2. Montrer que, pour tout $i \in \{0, \dots, k-1\}$, $2x_i^{(n,k)} = 2 + x_{n+i-k}^{(n,k)}$.

On pourra justifier que $\lfloor \frac{i-k}{k} \rfloor = -1$ et $\lfloor \frac{nk+i-k}{k} \rfloor = n-1$ puis utiliser une réindexation.

2.4.3. Que dire de $(x_0^{(n,k)}, x_1^{(n,k)}, \dots, x_{n-1}^{(n,k)})$ vis-à-vis du système $S(n, k)$?

2.5. Unicité de la solution du système $S(n, k)$

On considère le système linéaire homogène $H(n, k)$, de n équations linéaires à n inconnues réelles $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$, suivant :

$$H(n, k) : \begin{cases} 2z_i = z_{n-(k-i)} & \text{si } i \in \{0, \dots, k-1\}, \\ 2z_i = z_{i-k} & \text{si } i \in \{k, \dots, n-1\}. \end{cases}$$

2.5.1. Vérifier que le système $H(n, k)$ se traduit par les n équations $2z_i = z_{(i-k) \bmod n}$, $0 \leq i \leq n-1$.

2.5.2. Soit $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Vérifier que $4z_i = z_{(i-2k) \bmod n}$ et montrer plus généralement que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad 2^m z_i = z_{(i-mk) \bmod n}.$$

2.5.3. Résoudre le système $H(n, k)$.

2.5.4. Conclure quant à l'unicité de la solution du système $S(n, k)$.

3^{ème} Partie

Construction d'orbites périodiques confinées de Γ Étude du cas général

Soient n et k deux entiers naturels tels que $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n-1$ et que $n \wedge k = 1$. On reprend les notations de la partie précédente et on pose

$$x_i^{(n,k)} = \frac{1}{1-2^{-n}} \sum_{s=0}^{k-1} 2^{-\lfloor \frac{ns+i}{k} \rfloor}, \quad i \in \{0, \dots, n-1\}.$$

On cherche ici à établir d'autres propriétés remarquables des $x_i^{(n,k)}$, $0 \leq i \leq n-1$. Il est évident que ces réels sont strictement positifs.

Remarque : Le cas $k = 1$ étant déjà étudié dans la section 1.4. de la première partie, on peut supposer ici que $k \geq 2$, donc $n \geq 3$.

3.1. Calcul de $\ell = x_0^{(n,k)} - x_{n-1}^{(n,k)}$

3.1.1. Montrer que, pour tout $s \in \{1, \dots, k-1\}$, $\lfloor \frac{ns}{k} \rfloor = \lfloor \frac{ns-1}{k} \rfloor$.

On pourra effectuer la division euclidienne de ns par k .

3.1.2. En déduire que $\ell = \frac{2^n - 2}{2^n - 1}$.



3.2. La suite $(x_i^{(n,k)})_{0 \leq i \leq n-1}$ est strictement décroissante

3.2.1. Montrer que l'application $s \mapsto (ns) \bmod k$ est une bijection de $\{0, \dots, k-1\}$ sur lui-même.

3.2.2. Soit $i \in \{0, \dots, n-2\}$. Montrer qu'il existe $s_i \in \{0, \dots, k-1\}$ tel que $\lfloor \frac{ns_i+i}{k} \rfloor < \lfloor \frac{ns_{i+1}+i+1}{k} \rfloor$.

3.2.3. Établir la stricte décroissance de la suite $(x_i^{(n,k)})_{0 \leq i \leq n-1}$.

3.3. Des orbites périodiques d'ordre n et confinées de Γ

3.3.1. Justifier que $0 < x_{n-1}^{(n,k)} < \dots < x_k^{(n,k)} < 1 < x_{k-1}^{(n,k)} < \dots < x_0^{(n,k)} < 2$.

3.3.2. Montrer que $\{x_0^{(n,k)}, x_1^{(n,k)}, \dots, x_{n-1}^{(n,k)}\}$ est une orbite périodique d'ordre n et confinée de Γ .

3.3.3. Combien d'orbites périodiques d'ordre n et confinées de Γ peut-on obtenir de cette manière?

4^{ème} Partie

Détermination des parties confinées de Γ

4.1. Quelques propriétés utiles de l'application σ

4.1.1. Montrer que σ est surjective.

4.1.2. Déterminer $\sigma(0)$, $\sigma(1/2)$, $\sigma(1)$, $\sigma(2/3)$ et $\sigma(4/3)$ puis analyser la monotonie de l'application σ .

4.1.3. Déterminer les orbites périodiques d'ordre 1 sous σ .

4.1.4. Soient $x, y \in \Gamma$. Montrer que $\sigma(x) = \sigma(y)$ si, et seulement si, x et y sont égaux ou bien diamétralement opposés.

4.1.5. Soit $A = [a, a + \ell] \bmod 2$ un arc fermé de Γ , d'origine a et de longueur $\ell > 0$.

(i) Si $\ell < 1$, expliciter $\sigma(A)$ et montrer que $\sigma(A)$ est un arc fermé de Γ , de longueur 2ℓ , et que σ induit une bijection de A sur $\sigma(A)$.

(ii) Si $\ell \geq 1$, montrer que σ induit une surjection de A sur Γ .

(iii) Montrer que si $\ell \geq 1$ alors, l'image réciproque, par σ , de toute partie non vide B de Γ rencontre A ; c'est-à-dire que si $\emptyset \neq B \subset \Gamma$ alors $A \cap \sigma^{-1}(B) \neq \emptyset$.

Dans la suite de cette partie, on considère un arc fermé $A = [a, a + \ell] \bmod 2$ de Γ , d'origine $a \in \Gamma$ et de longueur $\ell \in]0, 1]$, et on lui associe la partie A_∞ de Γ , dite abusivement *ensemble limite associé* à A , définie par :

$$A_\infty = \{x \in \Gamma ; \mathcal{O}(x) \subset A\}.$$

L'objectif est d'étudier quelques propriétés de A_∞ et d'appliquer ensuite les résultats obtenus pour déterminer les parties confinées de Γ .

4.2. Ensemble limite associé à un demi cercle fermé

On suppose ici que $\ell = 1$ et on cherche à montrer que $A_\infty \neq \emptyset$.

4.2.1. Montrer que si $a \geq 1$ alors $0 \in A$ et conclure que $A_\infty \neq \emptyset$.

4.2.2. On suppose que $a < 1$ et on définit par récurrence les ensembles $A_0, A_1, A_2, \dots$ de la manière suivante :

$$A_0 = A \quad \text{et} \quad A_{n+1} = A \cap \sigma^{-1}(A_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \neq \emptyset$ et que $A_{n+1} \subset A_n$.

(ii) Montrer que $A_\infty = \bigcap_{n \geq 0} A_n$.

(iii) Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in A_n$. En admettant que « toute suite de nombre réels admet une sous-suite monotone », montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ admet une sous-suite convergente $(a_{\psi(n)})_{n \geq 0}$.

Dans la suite, on notera a_∞ la limite de $(a_{\psi(n)})_{n \geq 0}$: $a_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{\psi(n)}$.



(iv) Montrer que $a_\infty \in A_\infty$; en particulier $A_\infty \neq \emptyset$.

On remarquera que chaque A_n est une réunion finie d'arcs fermés.

4.2.3. Si $a > 1$, montrer que $A_\infty = \{0\}$. On pourra raisonner par l'absurde et expliciter A .

4.3. Ensemble limite associé à un arc fermé de cercle, de longueur < 1

On suppose ici que $\ell < 1$ et on cherche à montrer que la partie A_∞ est finie.

Pour tout couple $(u, v) \in \Gamma^2$, on pose :

$$d(u, v) = \min \{|u - v|, 2 - |u - v|\}.$$

4.3.1. Si $(x, y) \in A_\infty^2$, avec $x \neq y$.

(i) Montrer, en distinguant les cas, que

$$d(\sigma(x), \sigma(y)) = 2d(x, y) \quad \text{ou} \quad d(\sigma(x), \sigma(y)) = 2 - 2d(x, y).$$

(ii) Si de plus $d(x, y) \geq 2(1 - \ell)$, justifier que $d(\sigma(x), \sigma(y)) \geq 2(1 - \ell)$ puis montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \implies d(\sigma^n(x), \sigma^n(y)) \geq 2(1 - \ell).$$

4.3.2. Montrer qu'en général, la partie A_∞ est finie.

4.3.3. Si $0 \in A$, montrer que $A_\infty = \{0\}$.

4.4. Détermination des parties confinées de Γ

Soit C une partie confinée de Γ ; on sait par définition que C est non vide, stable par σ et contenue dans un arc fermé de cercle A , de longueur $\ell < 1$.

4.4.1. Montrer que C est une partie finie de Γ .

4.4.2. Justifier que σ induit une permutation sur C .

4.4.3. Déterminer la partie C lorsqu'elle est réduite à un point.

Dans la suite, on suppose que C contient au moins deux points et on pose :

$$C = \{a_0, \dots, a_{n-1}\}, \quad \text{avec } n \geq 2 \quad \text{et} \quad 2 > a_0 > \dots > a_{n-1} \geq 0.$$

4.4.4. Justifier que $a_{n-1} > 0$ et que $a_0 - a_{n-1} < 1$.

4.4.5. Soit $k = \text{Card}(\{j \in \{0, \dots, n-1\} ; a_j \in]1, 2[\})$.

(i) Montrer que $k \geq 1$ et que

$$a_0 > \dots > a_{k-1} > 1 > a_k > \dots > a_{n-1}.$$

(ii) Montrer que

$$\begin{cases} \sigma(a_i) = a_{n-(k-i)} & \text{si } i \in \{0, \dots, k-1\}, \\ \sigma(a_i) = a_{i-k} & \text{si } i \in \{k, \dots, n-1\}. \end{cases}$$

Que concluez-vous par rapport au système $S(n, k)$?

4.4.6. Montrer que $n \wedge k = 1$ et préciser les valeurs des réels $a_0, \dots, a_{n-1}$.

4.4.7. Soit $n \geq 2$ un entier naturel donné. Combien existe-t-il de parties confinées de Γ à n éléments ?

FIN DU SUJET