Royaume du Maroc
المملكة المغربية

Minitère de l'Education Nationale, du Préscolaire et des Sports
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة

Académie Hassan II des Sciences et Techniques
أكاديمية الحسن الثاني للعلوم و التقنيات

Juillet 2019 **Sujet de Mathématiques** **Durée : 4h**

Le sujet de l'épreuve de mathématiques du concours général des sciences et techniques, session 2019, est composé de trois problèmes à traiter dans l'ordre souhaité.
Pour répondre à une question de ces problèmes, tout candidat peut admettre et utiliser les résultats des questions qui la précédent, même si ne l'ai a pas traité, à condition d'indiquer avec précision les références des questions utilisées
Il est à noter que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de mentionner les références des questions abordées.

L'usage de tout document ou matériel électronique est interdit

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Problème 1 :

À propos de l'indépendance linéaire de la famille $(1, e, e^2)$

Notation, définitions et rappels :

1. On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ celui des entiers relatifs, $\mathbb{R}$ celui des nombres réels et $\mathbb{C}$ celui des nombres complexes. Un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dit non trivial s'il contient au moins deux éléments distincts.
2. **Coefficient binomial :**
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on définit : $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ le coefficient binomial usuel.
   Par convention, on pose $\binom{r}{k} = 0$ si $k > r$.
3. **Dérivées successives d'une fonction :**
   Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur I, soit p un entier naturel non nul. Par convention, on pose $f^{(0)} = f$. On dit que la fonction f est une fois dérivable sur I si elle est dérivable sur I, dans ce cas, on pose $f^{(1)} = f'$, où f' la fonction dérivée de f, où f' la fonction dérivée de f, $f^{(1)}$ est appelée la fonction dérivée d'ordre 1 de la fonction f.
   On dit que la fonction f est deux fois dérivable sur I si la fonction $f^{(1)}$ est dérivable sur I, dans ce cas, on pose $f^{(2)} = (f^{(1)})'$ ou $(f^{(1)})'$ la fonction dérivée de $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ est appelée la fonction dérivée d'ordre 2 de f, la fonction $f^{(2)}$ s'appelle aussi la dérivée seconde de f et se note f''.
   Par récurrence, on dit que la fonction f est p-fois dérivable sur I avec $p \geq 2$, si la fonction $f^{(p-1)}$ est dérivable sur I, dans ce cas on pose $f^{(p)} = (f^{(p-1)})'$, où $(f^{(p-1)})'$ est la fonction dérivée de $f^{(p-1)}$, $f^{(p)}$ est appelée la fonction dérivée d'ordre p de la fonction de f.

Partie 1 :

Préliminaires

1.1. Construction du nombre réel e, base du logarithme néperien :
On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$$

Pour tout entier naturel non nul n.

1.1.1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. On note e leur limite commune.

1.1.2. Justifier que $u_n < e < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1.1.3. **Irrationalité de e :**
Raisonnans par l'absurde, on suppose que e est rationnel et on pose $e = p/q$ avec $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Montrer que $q!u_q$ est un entier et conclure à une contradiction.

1.2. **Convergence d'une suite d'entiers :**
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite convergente d'entiers relatifs dont la limite est nulle. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$, tel que : $\forall n \geq N,\ \ x_n = 0$

1.3. **Formule de Taylor avec reste intégrale :**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $(n+1)-$dérivable sur I, de dérivée d'ordre $(n+1)$ continue sur I. Soient a et b deux éléments de I, pour tout $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$, on pose :

$$R_k = \int_a^b \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\mathrm{d}t$$

1.3.1. Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$,

$$R_{k-1} = \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_k$$

1.3.2. En déduire la formule de Taylor à l'ordre n avec reste intégrale suivante :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Partie 2 :

Application au résultat d'indépendance linéaire

On suppose qu'il existe trois nombres rationnels α, β, γ tels que $\alpha + \beta e + \gamma e^2 = 0$.

2.1. Montrer qu'on peut supposer les nombres α, β et γ des entiers relatifs.
On suppose désormais que les nombres α, β et γ sont des entiers relatifs et on considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = \alpha e^{-x} + \gamma e^x$$

2.2. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est n-fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f^{(n)}(x) = (-1)^n \alpha e^{-x} + \gamma e^x$$

2.3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \alpha e^{-1} + \gamma e = \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma + (-1)^k \alpha}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \left((-1)^{n+1} \alpha e^{-t} + \gamma e^t\right) \mathrm{d}t$$

2.4. On considère la suite numérique $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ y_n = \int_0^1 (1-t)^n \left((-1)^{n+1} \alpha e^{-t} + \gamma e^t\right) \mathrm{d}t$$

Montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

2.5. En déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq n_0$:

$$n!\beta + \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \left(\gamma + (-1)^k \alpha\right) = 0$$

2.6. Montrer que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Problème 2 :

À propos des parties de $\mathbb{C}$ stables par produit
et par somme de deux carrés de ses éléments

Notation, définitions et rappels :

Définition 1. Une partie $\mathcal{A}$ de $\mathbb{C}$ est dite *vérifie la propriété* $\mathcal{P}$, si elle est non vide et si de plus elle vérifie :

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}, \quad z_1 z_2 \in \mathcal{A} \text{ et } z_1^2 + z_2^2 \in \mathcal{A}$$

Définition 2. Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{C}$ vérifiant la propriété $\mathcal{A}$, si l'ensemble $\{z \in \mathcal{A} \mid |z| \leq 1\}$ est fini, son cardinal se notera $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, dans le cas contraire, on posera $\mathcal{C}(\mathcal{A}) = +\infty$.

Partie 1 :

Premiers exemples de parties de $\mathbb{C}$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}$

1.1. Vérifier que les ensembles suivants sont des parties de $\mathbb{C}$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ et préciser pour chacun d'eux la valeur de $\mathcal{C}(A)$,

(a) $A = \mathbb{N}^*$ **(b)** $A = \mathbb{Z}$

(c) $A = \{1, +\infty\}$ **(d)** $A = \mathbb{C}$

1.2. Soit A une partie de $\mathbb{C}$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}$, on note $\overline{A} = \{\bar{z}, \quad z \in A\}$, c'est-à-dire la partie de $\mathbb{C}$ constituée des conjugués des éléments de A.
Montrer que la partie $\overline{A}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ et déterminer $\mathcal{C}(\overline{A})$ en fonction de $\mathcal{C}(A)$.

1.3. Les nombres entiers de Gauss
On note $\mathbb{Z}[i]$ l'ensemble $\{a + ib \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$, c'est-à-dire la partie de $\mathbb{C}$ constituée de tous les nombres complexes de la forme $a + ib$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$. Les éléments de $\mathbb{Z}[i]$ sont appelés *les entiers de Gauss.*

1.3.1. Montrer que

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{Z}[i]^2, \quad z_1 + z_2 \in \mathbb{Z}[i], \quad z_1 z_2 \in \mathbb{Z}[i]$$

1.3.2. En déduire que $\mathbb{Z}[i]$ est une partie de $\mathbb{C}$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}$.

1.3.3. Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers relatifs tels que $a^2 + b^2 \leq 1$ puis en déduire que $\mathcal{C}(\mathbb{Z}[i]) = 5$.

1.4. Un autre exemple
On pose $A_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 \in \mathbb{Z}[i]\}$; ainsi un nombre complexe z est dans A_1 si et seulement si son carré est dans $\mathbb{Z}[i]$.

1.4.1. Montrer que A_1 est une partie de $\mathbb{C}$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}$.

1.4.2. Pour $\alpha \in \{-1, 0, 1, i\}$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = \alpha$ puis déterminer la valeur de $\mathcal{C}(A_1)$.

Partie 2 :

Étude de trois autres exemples

On considère le nombre complexe $j = \exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, et on note $\mathbb{Z}[j] = \{a + bj \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$, c'est-à-dire la partie de $\mathbb{C}$ constituée de tous les nombres complexes de la forme $a + bj$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$.

2.1. Un premier exemple :

2.1.1. Calculer j^3 et en déduire la valeur du nombre $1 + j + j^2$.

2.1.2. Montrer que

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{Z}[j]^2, \quad z_1 + z_2 \in \mathbb{Z}[j] \quad \text{et} \quad z_1 z_2 \in \mathbb{Z}[j]$$

2.1.3. En déduire que $\mathbb{Z}[j]$ est une partie de $\mathbb{C}$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}$.

2.1.4. Déterminer tous les couples d'entiers relatifs (a, b) vérifiant l'inégalité $(2a - b)^2 + 3b^2 \leq 4$ puis en déduire que $\mathcal{C}(\mathbb{Z}[j]) = 7$.

2.2. Un deuxième exemple :
Dans cette question, on considère la partie $\mathbb{Z}[j]^*$, c'est l'ensemble $\mathbb{Z}[j]$ privé de le nombre complexe nul 0.

2.2.1. Soient z_1 et z_2 deux éléments de $\mathbb{Z}[j]$. Montrer que si $z_1^2 + z_2^2 = 0$, alors $z_1 = z_2 = 0$.
On pourra factoriser l'expression $z_1^2 + z_2^2$ puis remarquer que le nombre $\sqrt{3}$ n'est pas rationnel.

2.2.2. Montrer que $\mathbb{Z}[j]^*$ est une partie de $\mathbb{C}$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}$.

2.2.3. Pour tout $\beta \in \{-j^2, -j, j, j^2\}$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = \beta$ puis déterminer la valeur de $\mathcal{C}(A_2)$.

Partie 3 :

Recherche de valeurs possible de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$

Dans cette partie, on considère une partie $\mathcal{A}$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ et on cherche à déterminer les valeurs possibles de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$.

3.1. On suppose qu'il existe $a \in A$ tel que $0 < |a| < 1$.

3.1.1. Montrer que pour tout entier naturel $n \neq m$, on a $a^n \neq a^m$.

3.1.2. Montrer alors $\mathcal{C}(A) = +\infty$.

3.2. **Quelques résultats utiles**

On considère un réel $\theta \in]-\pi, \pi[$ qui n'est ni de la forme $k\pi/6$, ni de la forme $k\pi/4$, $k \in \mathbb{Z}$, et on pose $b = e^{i\theta}$.

3.2.1. Si $\theta \in]\pi/3, 2\pi/3[$, montrer que $0 < |b^2 + b^4| < 1$.

3.2.2. Si $\theta \in]\pi/6, 5\pi/6[$, montrer que $0 < |b^4 + b^8| < 1$.

3.2.3. Si $\theta \in]0, \pi/6[$, montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n\theta \notin]\pi/3, \pi/2[$ et en déduire que $0 < |b^{2n} + b^{4n}| < 1$.

3.2.4. Si $\theta \in]\pi/3, 0[$, montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < |b^{2n} + b^{4n}| < 1$. *On pourra opérer une conjugaison.*

3.2.5. Étudier les cas restants et montrer qu'il existe toujours $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < |b^{2p} + b^{4p}| < 1$.

3.3. On suppose dans cette question que $\mathcal{C}(A)$ est fini et que $\mathcal{C}(A) = 2$.

3.3.1. Montrer qu'il existe $a \in A$ tel que $|a| = 1$.
Un tel a est choisi, on le note $a = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]-\pi, \pi]$.

3.3.2. Montrer que le nombre θ est un multiple de $\pi/4$ ou de $\pi/6$.

3.3.3. En déduire que $\mathcal{C}(A) \leq 17$.

3.4. Quels sont les valeurs possibles de $\mathcal{C}(A)$?

Problème 3

Théorème de Darboux et quelques applications

Notations et rappels

Dans ce problème, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels et $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du nombre réel x. On rappelle et on admet la propriété suivante.

Si I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue, alors φ est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

Partie 1

Théorème de Darboux et une première application

1.1. Soient $a < b$ deux nombres réels tels que $a < b$ et soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur le segment $[a, b]$; on se donne un réel γ compris entre les deux nombres $f'(a)$ et $f'(b)$ et distinct de chacun d'eux ; si par exemple on a $f'(a) < \gamma < f'(b)$, alors $\gamma \in]f'(a), f'(b)[$.

1.1.1. Montrer que la fonction $g : t \longmapsto f(t) - \gamma t$, définie sur le segment $[a, b]$, n'est pas strictement monotone.

1.1.2. En déduire que la fonction g n'est pas injective et montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \gamma$ (Théorème de Darboux).

1.2. **Quelques conséquences du théorème de Darboux :**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial et soit $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable.

1.2.1. Montrer que si la fonction h' ne s'annule pas sur I, alors elle garde un signe constant sur I.

1.2.2. Montrer que si $h'(I)$ est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire si $(\mu, \lambda) \subset h'(I)$, avec $\lambda < \mu$, alors $[\lambda, \mu] \subset h'(I)$.

1.2.3. Montrer que si $h'(I) \subset \mathbb{Z}$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in I, \quad h(t) = kt + \beta$$

1.3. **Une application :**

On cherche dans cette section à déterminer tous les couples (J, f) où J un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur J telle que

$$\forall t \in J, \quad f'(t) = \lfloor f(t) \rfloor$$

1.3.1. Soit (f, J) un tel couple.
i. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = kt + \beta$$

ii. Si $k = 0$, montrer que $\beta \in [0, 1]$ et que J est un intervalle ouvert non vide quelconque de $\mathbb{R}$.
iii. Si $k \neq 0$, on note $\alpha = \beta/k$, $I = \lfloor \beta/k \rfloor$ puis résoudre.

1.3.2. Déterminer alors tous les couples (J, f) répondant à la question et pour lesquels l'intervalle J est le plus grand possible.

Partie 2

Application à l'étude d'une équation différentielle du second ordre

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f''(t) = f(t)$$

2.1. On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0) = 0$.

2.1.1. Étudier le signe de l'application $t \longmapsto \dfrac{f'(t)}{f(t)}$ sur chacun des intervalles $]-\infty, t_0[$ et $]t_0, +\infty[$ puis montrer que $f'(t_0) = 0$.
On considère les deux applications g et h définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = (f'(t) - f(t))e^t, \quad h(t) = (f'(t) + f(t))e^{-t}$$

2.1.2. Vérifier que les applications g et h sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer leurs dérivées g' et h'.

2.1.3. Montrer que si g est croissante alors h est décroissante.

2.1.4. En déduire que g est croissante sur l'intervalle $]-\infty, t_0]$ et décroissante sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$ puis conclure qu'elle est nulle.
On vient de prouver que si f s'annule sur $\mathbb{R}$, alors elle est identiquement nulle.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) \neq 0$$

2.2. On suppose à présent que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) \neq 0$$

2.3. Montrer que la fonction f'' garde un signe constant sur $\mathbb{R}$.

2.4. On suppose ici, que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f''(t) > 0$.

2.4.1. Vérifier que f est solution de l'équation différentielle $y'' = y = 0$.

2.4.2. En déduire qu'il existe un couple (α, β) de réels positifs tels que alpha + β > 0 et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \alpha e^t + \beta e^{-t}$$

2.5. On suppose ici que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f''(t) < 0$.

2.5.1. Vérifier que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

2.5.2. En déduire qu'il existe un couple (λ, φ) de réels tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \lambda \cos(t + \varphi)$$

puis trouver une contradiction.

2.6. Déterminer tous les couples (I, ψ) où I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, le plus grand possible et $\psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi''(t) = \psi(t)$$

Fin du sujet